This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Library
of the
University of Wisconsin

Der Rahmen

Einfaches Verfahren zur Berechnung von Rahmen aus Eisen und Eisenbeton mit ausgeführten Beispielen

von

Dr.-Ing. **W. Gehler**
o. Professor an der Königlichen Technischen Hochschule zu Dresden

Mit 190 Textabbildungen

BERLIN 1913
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.

Alle Rechte,
auch das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1913
by Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag, Berlin.

625-7965

186838
JUL 16 1914
SP
G27
R

VORWORT.

Die Berechnung der Rahmenbauten, welche seit etwa einem Jahrzehnt im Eisenbetonbau und in neuerer Zeit auch im Eisenbau häufig angewendet werden, erfordert bekanntlich wegen der oft vielfachen statischen Unbestimmtheit dieser Grundformen einen großen Aufwand an Zeit und Arbeit. Die langwierige verwickelte Berechnung solcher Gebilde hat aber außerdem noch den Nachteil, daß sehr leicht Versehen in den Vorzeichen und Potenzen unterlaufen, die erst am Ende der Arbeit im Ergebnis erkennbar und meist nur durch eine vollständige unabhängige Wiederholung des Rechnungsganges aufzufinden sind. Für die Praxis liegt daher das dringende Bedürfnis vor, diesen umständlichen Weg möglichst abzukürzen und diese langwierige ermüdende Rechenarbeit zu ersparen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun ein Verfahren geboten, nach welchem für die einzelnen Belastungsfälle der gebräuchlichsten Rahmenformen die statisch unbestimmbaren Größen unmittelbar durch Verwendung von Gleichungen gefunden werden können. Dadurch, daß als statisch unbestimmbare Größen jeweils die Einspannungsgrade der Stabenden eingeführt werden, gelingt es mit diesen ohne weiteres, die Eckmomente der Rahmenstäbe und damit die gesamte Momentenverteilung zu finden. Nach dieser auf kürzestem Weg erfolgten Ermittlung der statisch unbestimmbaren Größen erübrigt es nur, sich wie bei jeder Aufgabe mit statisch bestimmten Grundformen ein klares Bild der Kraftwirkung zu verschaffen, was insbesondere durch die Bestimmung der Stützkräfte mit Hilfe der Mittelkraftlinie geschehen kann. Während im I. bis IV. Teil die zur Ausbildung des Verfahrens notwendigen theoretischen Erörterungen enthalten sind, welche den Inhalt einer Dissertationsschrift des Verfassers bildeten, ist im letzten Teil ein für die praktische Anwendung bestimmter Leitfaden angefügt. In diesem sind eine Reihe von Fragen erörtert, die für die Durchführung der Berechnung von Bedeutung sind.

Endlich ist das Verfahren an einigen Beispielen ausgeführter Eisenbetonbauten bis in alle Einzelheiten erläutert, wobei möglichst sämtliche hier in Betracht kommenden Umstände eingehend erörtert sind. Diese Beispiele wurden so gewählt, daß sie die verschiedensten Belastungsarten und Rahmenformen umfassen und dem Leser ein möglichst deutliches Bild der eigenartigen Kräftewirkungen im Rahmen gewähren.

Möge dieses einfache Verfahren, das aus den Erfahrungen des Verfassers im Konstruktionsbureau hervorgegangen ist, den ausführenden Ingenieuren ein Werkzeug dazu bieten, beim Entwerfen rasch verschiedene Ausführungsmöglichkeiten studieren und bewerten zu können.

Dresden, im Juli 1913.

Dr.-Ing. **Gehler.**

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Einleitung 1

I. Das Wesen der statischen Unbestimmtheit von Eisenbetonbauten 2

A. Die statische Grundform des Trägers im Längsschnitt 5

1. Der Grad der statischen Unbestimmtheit 5

a) Der dreiseitige Rahmen mit Fußgelenken 7

b) Der dreiseitige Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen 7

c) Der durchlaufende Träger mit gelenkigen Stützen . . 8

d) Der durchlaufende Träger mit fest verbundenen Zwischenstützen 8

e) Der durchlaufende Träger mit fest verbundenen Zwischenstützen und mit Endpfosten 9

f) Der vierseitige Rahmen 10

g) Das doppelte Viereckgefach 11

h) Das Pfostenfachwerk 11

2. Die statischen Unklarheiten 12

B. Die statische Grundform des Trägers im Querschnitt 15

1. Der Einspannungsgrad bei starrer Stützung 15

2. Der Einfluß elastischer Stützensenkung 17

II. Formeln für die Einspannungsgrade der Rahmen 22

A. Die Bedeutung des Einspannungsgrades 22

B. Voraussetzungen und Bezeichnungen 25

C. Der dreiseitige Gelenkrahmen 28

I. Senkrechte Belastung des Balkens 29

1. Senkrechte Einzellast in beliebiger Lage 29

2. Senkrechte Einzellast in Balkenmitte 30

3. Mehrere senkrechte Einzellasten 31

4. Gleichmäßig verteilte Last 31

II. Wagerechte Belastung eines Pfostens 32

5. Einzellast in beliebiger Lage 32

6. Wagerechte Einzellast in der oberen Rahmenecke . . . 34

7. Wagerechte, gleichmäßig verteilte Belastung 34

8. Wagerechte, dreieckförmige Belastung 35

Seite

D. Der dreiseitige, eingespannte Rahmen 36
I. Senkrechte Belastung des Balkens 36
1. Senkrechte Einzellast in beliebiger Lage 36
2. Einzellast in Balkenmitte 40
3. Senkrechte, gleichmäßig verteilte Belastung 40
II. Wagerechte Belastung eines Pfostens 41
4. Einzellast in beliebiger Lage 41
5. Wagerechte Einzellast in der oberen Rahmenecke . . . 43
6. Wagerechte, gleichmäßig verteilte Belastung 44
7. Wagerechte, dreieckförmige Belastung 45

E. Der vierseitige Rahmen 45
I. Senkrechte Belastung 46
1. Gleichmäßig verteilte Last auf den oberen Balken . . . 46
2. Gleichmäßig verteilte Last auf den unteren Balken . . . 48
II. Wagerechte Belastung 49
3. Wagerechte, gleichmäßig verteilte Belastung 49
4. Wagerechte Einzellast in oberer Rahmenecke 52

F. Beziehungen zwischen den Werten der Einspannungsgrade 52
I. Für den dreiseitigen Gelenkrahmen 52
II. Für den dreiseitigen, eingespannten Rahmen 53
III. Für den vierseitigen Rahmen 54
IV. Zusammenfassung 54

III. Die Formänderung der Rahmen und die Mittelkraftlinien 56

A. Vergleich der Formänderung von Dreiecks- und Viereckgefachen . 56

B. Biegelinie, Momentenfläche und Eisenverteilung für einfache, gerade Stäbe 58
a) Wenn die Kräfte senkrecht zur Stabachse wirken . . 59
b) Wenn die Kräfte schräg zur Stabachse wirken . . . 60

C. Begriff und Bedeutung der Mittelkraftlinie und Mittelkraftfläche . . 61

D. Anwendungsbeispiele für die Mittelkraftlinie 67
1. Gelenkrahmen mit senkrechter Belastung 67
2. Gelenkrahmen mit wagerechter Belastung 69
3. Eingespannter Rahmen mit senkrechter Belastung . . . 71
4. Vierseitiger Rahmen mit wagerechter Kraft in der oberen Rahmenecke 74

E. Aufskizzieren der Formänderung zur Ermittlung der Momentenverteilung 79
1. Beim dreiseitigen Gelenkrahmen 79
2. Beim dreiseitigen eingespannten Rahmen 84
3. Beim vierseitigen Rahmen 84

F. Aufzeichnen der Verbiegungen der Rahmenstäbe 85
1. Die Beziehungen zwischen den Knotendrehwinkeln, den Stabdrehwinkeln und den Tangentenwinkeln eines Rahmens 85
2. Die Biegelinie eines Rahmenstabes 87
3. Die Verschiebung der Rahmenecken 89

Seite

IV. Die Nebeneinflüsse 90

A. Einfluß der Stützensenkung beim dreiseitigen Rahmen 91

1. Wagerechte Verschiebung eines Fußpunktes beim Gelenkrahmen 91
2. Senkrechte Verschiebung eines Fußpunktes beim Gelenkrahmen 92
3. Stützenverschiebung beim eingespannten Rahmen . . . 93
4. Versuchsergebnisse 95

B. Einfluß der Wärmeänderung 102

1. Die Wärmeänderung beim Gelenkrahmen 102
2. Versuchsergebnisse 104

V. Leitfaden für die Anwendung 109

A. Wiederholung des Gedankenganges der Rechnung 109

B. Ergänzung der Rahmenformeln 112

1. Rahmen mit Kragarm 112
2. Gelenkrahmen mit geknickter Balkenachse 114
3. Gelenkrahmen mit gekrümmter Balkenachse 116
4. Gelenkrahmen mit ungleich hohen und verschieden steifen Pfosten 118
5. Gelenkrahmen mit schrägstehenden Pfosten 121
6. Vierseitige Rahmen 122

C. Ergänzende Erörterungen 124

1. Biegungsmomente und Querkräfte 124
2. Mittelkraftlinien 127
3. Biegelinie 129
4. Die Wahl des mittleren Trägheitsmomentes 132

D. Beispiele:

I. Dreiseitige Rahmenbrücke für eine Eisenbahnunterführung . . 133
II. Gelenkrahmen mit geknickter Balkenachse für ein Hallendach 151
III. Vierseitiger Rahmen für eine Eisenbahnunterführung 161
IV. Vierseitiger Rahmen mit senkrechtem Kragarm 175

Einleitung.

Die Bemessung von Bauteilen kann entweder rein erfahrungsgemäß auf Grund des natürlichen statischen Gefühls und in Anlehnung an bereits bestehende Bauwerke erfolgen oder unmittelbar durch Bestimmung der Abmessungen mittels der Theorie. Der erste Weg führte im Altertum und im Mittelalter zur Ausbildung der Ingenieurkunst, wobei das Wissen nur auf Erfahrung beruhte, sich von Geschlecht zu Geschlecht vererbte und mit der Kultur eines Volkes oft auch wieder verloren ging. Durch Beobachtung und Nachahmung der Natur wurden die wichtigen Grundformen des Balkens und der Kragträger für die Holzbauten sowie des Gewölbes für die Steinbauten ausgebildet und durch Beachtung der Fehler an nicht standfesten Bauwerken fortschreitend verbessert. Die bewundernswerten Bauten der Römer, die zum Teil heute noch bestehen, wie z. B. die 36 m weit gespannte Brücke über den Tajo bei Alcantara sowie das Pantheon in Rom mit einer Kuppel von 40 m Lichtweite, zeigen, welche hohe Stufe der Baukunst selbst bei dem nur auf Erfahrung fußenden Entwerfen erreicht werden kann.

Die unmittelbare Bestimmung der Abmessungen erfolgt mit Hilfe der Theorie, die auf Grund der mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnis der Neuzeit geschaffen und gleichzeitig mit der Entwicklung der Eisenbauten im vergangenen Jahrhundert ausgebildet wurde. Dieser unschätzbare gerade Weg zur raschen unmittelbaren Bemessung der Bauglieder ist jedoch nur dann ohne weiteres gangbar, wenn die Grundform des Bauwerks statisch bestimmt ist. Bei der Berechnung von statisch unbestimmbaren Trägerformen dagegen treten bekanntlich stets die Größen EJ und EF auf, wobei die Elastizitätsziffer E von dem gewählten Baustoff und das Trägheitsmoment J sowie die Querschnittsfläche F von den Querschnittsabmessungen abhängen. Diese Abmessungen müssen daher zunächst geschätzt werden und zwar entweder nach dem statischen Gefühl oder auf Grund der durch Erfahrung an ähnlichen Bauwerken gewonnenen Regeln. Die übliche Berechnung statisch unbestimmter Trägerformen kann daher eigentlich nur als eine „Belastungsprobe auf dem Zeichenbrett", nicht aber als ein Verfahren zur unmittelbaren Bemessung angesehen werden. Oft werden z. B. als erste Annäherung sämtliche Stabquerschnitte gleich groß, also mit gleichem Trägheitsmoment J und gleichem Querschnitt F angenommen und die Spannungsberechnung für diesen Fall bis in alle Einzelheiten durchgeführt. Auch dann, wenn sich infolge dieser Rechnung eine wesentliche Abänderung der Querschnitte gegenüber jener ersten Annahme erforderlich macht, wird doch meist aus Mangel an Zeit davon abgesehen, den gesamten Rechnungsgang für die gefundenen Querschnitte nochmals zu wiederholen, ohne daß man sich aber jedesmal aus-

reichende Gewißheit über die Größe der Abweichung der wirklich zu erwartenden von den berechneten Spannungen verschafft.

In Anbetracht dieser zeitraubenden Vorarbeiten für die Bemessung statisch unbestimmter Grundformen liegt demnach das Bedürfnis nach einem einfacheren, rascher zum Ziele führenden Verfahren vor, besonders bei Eisenbetonbauten, bei denen in der Art ihrer Herstellung als zusammenhängender Körper eine vielfach statische Unbestimmtheit begründet ist.

Als Beitrag zu dieser bereits mehrfach behandelten Frage soll daher im ersten Teil der vorliegenden Arbeit zunächst das Wesen der statischen Unbestimmtheit von Eisenbetonbauten erörtert werden.

Im zweiten Teil wird für die am häufigsten vorkommenden Grundformen von Eisenbetonbauten, und zwar für eine Reihe statisch unbestimmter Rahmen und Viereckgefache ein neues Verfahren zur einfachen Bemessung derselben mittels des „Einspannungsgrades" hergeleitet. Die hierbei gefundenen Formeln, welche ohne Beschränkung auf einen bestimmten Baustoff entwickelt werden, sind naturgemäß auch für die Eisenbauten ohne weiteres anwendbar und dürften auch für diese eine große Erleichterung der Entwurfsarbeiten bringen.

Im dritten Teil wird sodann versucht, die Formänderung der einfachen Rahmen und Viereckgefache zu erläutern und ihren Zusammenhang mit den auftretenden Biegungsmomenten dem statischen Gefühl näherzubringen. Ein willkommenes Hilfsmittel bieten hierzu Versuche mit biegsamen Modellen, die nach den Erfahrungen des Verfassers am raschesten und sichersten die Wirkungsweise dieser statisch unbestimmten Grundformen veranschaulichen. Sie können zur Schulung und Stärkung des statischen Gefühls dienen, das heute leider zu oft durch die zu starke einseitige Betonung der Rechenarbeit verkümmert. Von einer Wiedergabe dieser Versuche an dieser Stelle wird abgesehen, dafür aber ein neues Verfahren angegeben, das auf dem Begriff der „Mittelkraftlinien" aufgebaut ist und die rasche Aufzeichnung der richtigen Verbiegungsform eines Rahmens ermöglicht. Gleichzeitig bietet dieses Verfahren den Vorteil, in einfachster Weise auch die in jedem Querschnitt des Rahmens wirkenden Längs- und Querkräfte zu bestimmen und einen Kräfteplan zu zeichnen, der ein klares Bild vor allem auch für die Stützkräfte bietet. Endlich wird durch diese Mittelkraftlinien die Bestimmung des Vorzeichens wesentlich erleichtert.

Im vierten Teile werden die Nebeneinflüsse der Stützensenkung und der Wärmewirkung an dem Beispiel des Gelenkrahmens erörtert und durch die Ergebnisse eigener Versuche belegt. Diese liefern auch einen Beitrag zu der wichtigen Frage, mit welcher Wärmeänderung bei Eisenbetonkörpern zu rechnen ist.

I. Das Wesen der statischen Unbestimmtheit von Eisenbetonbauten.

Der Unterschied zwischen den gebräuchlichen statischen Grundformen von Eisenbeton- und Eisenbauten ist vor allem in den Eigenheiten der beiden Baustoffe und in ihrer Herstellungsart begründet. Der scharfe

Wettbewerb unter den Eisenbauten im vergangenen Jahrhundert hat zu dem Bestreben geführt, den kostbaren Baustoff soviel als möglich auszunutzen und die einzelnen Teile möglichst sparsam zu bemessen. Durch Verringerung des Eisengewichts der Balken wurde nicht nur an Material gespart, sondern gleichzeitig das Eigengewicht des Tragwerks, also die tote Last vermindert und der „Wirkungsgrad" des Trägers, das Verhältnis von Nutzlast zum Eigengewicht, erhöht. Die vielseitigen Festigkeitseigenschaften des zug-, druck- und biegungsfesten Eisens, dessen Güte von Jahrzehnt zu Jahrzehnt durch Verbesserung des Hüttenverfahrens erhöht wurde, führten zu einer möglichst weitgehenden Ausnutzung seiner Festigkeit bis zur äußerst zulässigen Grenze. Gegenüber statisch unbestimmten Grundformen boten die statisch bestimmbaren den Vorzug, daß bei diesen die wirklich auftretenden Stabkräfte mit großer Genauigkeit bestimmt werden konnten und von einem übermäßigen Sicherheitszuschlag abgesehen werden durfte, der infolge zweifelhafter Belastungsannahmen, in der Hauptsache aber durch die Unsicherheit der Auflagerbedingungen und durch die Wirkungen der Wärmeschwankungen bei äußerer statischer Unbestimmtheit sowie durch etwaige Ausführungsfehler bei innerer statischer Unbestimmtheit bedingt wird. Im Eisenbau wird daher heute stets volle Klarheit der Kraftwirkung angestrebt, und zwar durch statisch bestimmte Stützung des Trägers, durch einfache Dreiecksgliederung der Tragwände und endlich bei größeren Bauwerken wohl auch durch bewegliche Lagerung der einzelnen Tragwerkteile der Fahrbahn und der Querträger sowie der Wind- und Querverbände.

Bei den Eisenbetonbauten dagegen werden die einzelnen Tragteile, die Säulen, Balken und Deckenplatten durch Ausfüllen der Holzformen mittels Betonmörtels, also wie aus einem Guß, zusammenhängend hergestellt. In dieser Ausführungsweise ist es demnach begründet, daß bei einem Eisenbetonbau möglichst wenige Trennungsfugen zwischen den einzelnen Tragteilen angeordnet werden, woraus sich eine starre, also statisch vielfach unbestimmte Verbindung derselben untereinander ergibt. Verbietet nun dieser Umstand einerseits eine so weitgehende Ausnutzung des Baustoffes, wie sie bei einem Eisenbau möglich ist, so bietet doch anderseits die sogenannte Einspannung der Trägerenden den Vorteil einer wesentlichen Verminderung der positiven Biegungsmomente und damit in der Regel die Möglichkeit einer Verringerung der bei statisch bestimmter Stützung erforderlichen Abmessungen. Auch gewährt der Zusammenhalt aller Tragteile eines Eisenbetonbauwerks einen wertvollen Sicherheitsfaktor für alle Zufälligkeiten und Witterungseinflüsse bei der Ausführung, die die Güte des Erzeugnisses beeinträchtigen können.

Im bewußten Gegensatz zu den Eisenbauten wird daher bei den Eisenbetonbauten gewöhnlich eine möglichst starre Verbindung aller Teile und damit die vielfache statische Unbestimmtheit angestrebt, falls nicht die Rücksicht auf etwa zu erwartende Auflagerveränderungen und die Wärmewirkungen eine möglichst statische Bestimmtheit erfordert. Bei den üblichen Hochbauten wird in der Regel durch eine sichere Gründungsart eine verschiedenartige Senkung der Stützen verhindert,

die bekanntlich alle durchlaufenden Trägerteile, also Balken und Platten, in ihrem Bestande gefährden könnte. Falls jedoch derartige Setzungen nicht ausgeschlossen sind, muß wenigstens während der Ausführung durch Anordnung einstweiliger, später zu schließender Fugen eine statische Bestimmtheit der Grundform angestrebt werden, so daß die hauptsächlichsten Setzungen, die vor allem unter dem verhältnismäßig großen Eigengewicht eintreten, ohne Nachteil bleiben.[1]) Nur ausnahmsweise und bei besonders schwierigen und ausgedehnten Bauten, wie z. B. bei der Querbahnsteighalle für den Hauptbahnhof in Leipzig,[2]) empfiehlt es sich, durch Anwendung des frei gestützten Balkens und des Dreigelenkbogens möglichst sämtliche Bauteile in statisch bestimmte Grundformen aufzulösen.

Im Brückenbau gelten für Eisenbeton insofern die gleichen Grundsätze wie für Eisenbauten, als von der Anwendung äußerlich statisch unbestimmter Grundformen für die Hauptträger abgesehen werden muß, sobald beträchtliche Senkungen der Pfeiler und Widerlager zu erwarten sind. Im Querschnitt einer Eisenbetonbrücke dagegen wird stets die Platte mit dem Balken starr verbunden (vergl. S. 15), so daß das Tragwerk innerlich stets vielfach statisch unbestimmt bleibt.

Unumgänglich notwendig ist jedenfalls die Anordnung von Trennungsfugen mit Rücksicht auf die Wärmewirkung. Zahlreiche Beobachtungen des Verfassers führten zu dem Ergebnis, daß, sobald bei Eisenbetonbauten die Länge von 50 m als Abstand zweier Trennungsfugen überschritten wird, eine selbsttätige Trennung durch einen sogenannten „wilden Riß" zu befürchten ist. Dieses Maß hängt naturgemäß sehr von dem Klima des Bauortes sowie von der Stärke und Elastizität der Bauteile ab. Als kleinstes übliches Maß darf 15 m, als Mittelwert etwa 30 m angenommen werden.

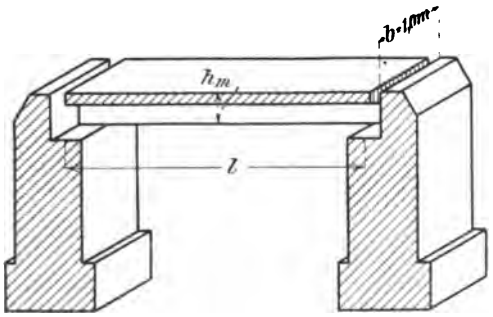


Abb. 1.

Um einen Anhalt für die Größenordnung der infolge der Wärmeänderung auftretenden Kräfte zu geben, möge für eine Balkenbrücke (Abb. 1) die Schubkraft bestimmt werden, die bei einer Wärmeänderung von 30° C. auf die starr gedachten Widerlager ausgeübt wird, wenn diese dicht an die Eisenbetontafel anstoßen, das Bauwerk also ohne Zwischenraum und ohne bewegliche Lagerung ausgeführt ist. Nach dem Hookeschen Gesetz ist $\alpha = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$, wenn $\alpha = \frac{1}{800} \cdot \frac{1}{100}$ die Ausdehnungsziffer für Beton, Δl die Veränderung der Stützweite l infolge der Wärme-

[1]) Ein Beispiel hierfür bietet die Ausführung der Markthalle für Kälber und Schweine auf dem Schlachthof zu Dresden (vergl. Gehler, Städtische Eisenbetonbauten, „Bauwelt", Februar 1911).

[2]) Vergl. Gehler, Querbahnsteighalle in Eisenbeton für den Hauptbahnhof in Leipzig, Deutsche Bauzeitung 1912, Betonbeiblatt, Heft 9 bis 10.

schwankung, σ die Spannung und $E = 140\,000$ kg/qcm die Elastizitätsziffer bezeichnet. Dann ist die Beanspruchung infolge der Erwärmung um 1° C

$$\sigma = \alpha \,.\, E = \frac{1}{100.800} \cdot 140\,000 = 1{,}75 \text{ kg/qcm.}$$

Für eine mittlere Höhe des Trägerquerschnitts von 0,45 m und einen Brückenstreifen von 1,0 m Breite ergibt sich der Brückenquerschnitt $F = 45 \,.\, 100 = 4500$ qcm, demnach bei einer Wärmeänderung um 30° die Schubkraft

$$D = F\sigma_t = 4500 \,.\, 30 \,.\, 1{,}75 = 236\,000 \text{ kg} = 236 \text{ t.}$$

Diese Kraft ist von derselben Größenordnung wie der Gewölbeschub einer gewölbten Brücke von mittlerer Stützweite, z. B. der König-Friedrich-August-Brücke in Dresden. Da es ausgeschlossen ist, solche Kräfte durch die üblichen Standwiderlager der Balkenbrücken oder gar durch die Bauteile eines Gebäudes aufzunehmen, nicht vorhergesehene Bewegungen der Widerlager aber stets Nachteile mit sich bringen, so bleibt nur der Ausweg, von vornherein durch Anordnung von Trennungsfugen die infolge des Wärmespiels notwendige Bewegungsfreiheit zu schaffen.[1])

Bei der näheren Betrachtung der vielfachen statischen Unbestimmtheit eines Eisenbetonbauwerkes ist zunächst die statische Grundform des Trägers im Längsschnitt und sodann im Querschnitt zu unterscheiden.

A. Die statische Grundform des Trägers im Längsschnitt.

1. Der Grad der statischen Unbestimmtheit.

Wie allgemein in der Statik üblich, hat man auch hier zwischen innerer und äußerer statischer Unbestimmtheit zu unterscheiden.

Bei allen Trägern, die nicht einen geschlossenen Rahmen bilden, ergibt sich eine statische Unbestimmtheit nur durch die Art der Stützung, also durch die sogenannten überzähligen Auflagerbedingungen. Diese Grundformen, wie z. B. die dreiseitigen Rahmen, durchlaufenden und eingespannten Träger, sind daher sämtlich äußerlich statisch unbestimmt.

Bei den Viereckgefachen dagegen, ebenso wie bei Dreiecksgefachen mit überzähligen Stäben, kann durch keinerlei Veränderung der Stützung eine statische Bestimmtheit erzielt werden. Diese Gebilde sind daher innerlich statisch unbestimmt. Während bei den Dreiecksfachwerken unter Voraussetzung gelenkiger Knoten die statische Unbestimmtheit durch überzählige Stäbe entsteht, ergibt sich dieselbe bei den strebenlosen Viereckgefachen durch steife Knotenverbindungen.

Am übersichtlichsten wird die Betrachtung, wenn man die Begriffe der Scheiben und ihre Verbindung mittels Gelenkstäben zugrunde legt, wie sie in den neueren Lehrbüchern zu finden und auch vom Verfasser im Handbuch für Eisenbetonbau, Kap. Balkenbrücken, behandelt sind.[2])

[1]) Über die Größe der in einem Eisenbetonkörper auftretenden Wärmeänderung gibt der im IV. Abschnitt behandelte Versuch an einem Bauwerk Aufschluß.

[2]) Siehe Mehrtens, Statik der Baukonstruktion, I. Bd., § 4; Föppl, Technische Mechanik, 1903, II. Bd., S. 209; Foerster, Eisenkonstruktion, 1909, S. 379.

In Abb. 2 bis 5 sind die verschiedenen Möglichkeiten von Scheibenverbindungen dargestellt.

Im 1. Falle (Abb. 2) sind die beiden Scheiben nicht miteinander verbunden. Es findet keine Berührung derselben statt, so daß eine Verschiebung in der Richtung zweier Achsen sowie eine Drehung möglich ist, sich also drei sogenannte Bewegungsfreiheiten ergeben. Als Beispiel sei die Trennungsfuge zwischen den freien Enden eines Kragträgers (Abb. 2b) angeführt.

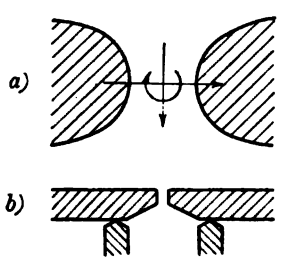


Abb. 2.

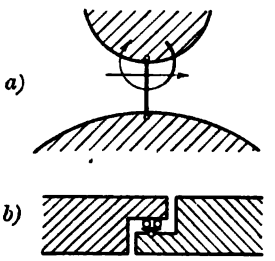


Abb. 3.

Im 2. Falle (Abb. 3) erfolgt eine zwangläufige Führung in einer Geraden, die der Verschiebungsrichtung des Gleit- oder Rollenkipplagers eines Kragträgers der Abb. 3b entspricht. Es sind dann zwei Bewegungsfreiheiten vorhanden, die Verschiebung in einer Richtung und eine Drehung. Durch das Zeichen eines an die beiden Scheiben gelenkig angeschlossenen Stabes in Abb. 3a wird angedeutet, daß die Verschieblichkeit in der Stabrichtung aufgehoben und eine Verschiebung der einen Scheibe gegen die andere nur senkrecht zur Stabrichtung, endlich aber noch eine Drehung möglich ist.

Im 3. Falle (Abb. 4) sind die beiden Scheiben durch zwei im Endlichen sich schneidende Stäbe miteinander verbunden gedacht, so daß nur noch eine Bewegungsfreiheit übrig bleibt, nämlich die Drehung der einen Scheibe um den Schnittpunkt der beiden Stabachsen, den sogenannten Gelenkpunkt. Als Beispiel ist in Abb. 4b das Scheitelgelenk eines Dreigelenkbogenträgers angegeben.

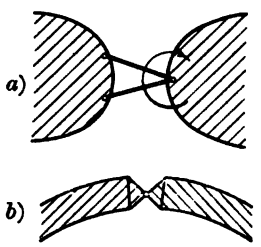


Abb. 4.

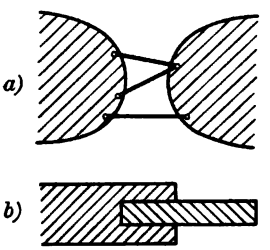


Abb. 5.

Im 4. Falle (Abb. 5) endlich, der starren Verbindung, die durch drei Stäbe erzeugt werden kann, ist jede Bewegungsfreiheit aufgehoben, wie z. B. bei der in Abb. 5b dargestellten festen Einspannung eines Trägerendes.

Um nun eine Scheibe derart mit einer anderen zu verbinden, daß sie sich nicht gegen diese bewegen kann, sind demnach drei Verbindungsstäbe nötig, die auch durch die entsprechenden Kräfte ersetzt werden können. Hierbei ist jedoch vorauszusetzen, daß die drei Stäbe nicht parallel laufen, sich aber auch nicht in einem Punkte schneiden.

Bei der Verbindung mehrerer Scheiben zu einem Stabwerk mittels solcher Gelenkstäbe können für jede Scheibe 3, für s Scheiben also $3s$ Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

Ist v die Anzahl der Verbindungsstäbe dieser Scheiben und a die Zahl der zur Stützung derselben auf der Erdscheibe erforderlichen Stützstäbe oder Auflagerbedingungen, so erhält man ein statisch bestimmbares System dann, wenn sich die unbekannten Größen v und a aus den vorhandenen $3s$ Gleichungen ermitteln lassen, wenn also

$$v + a = 3s \quad \text{oder} \quad v = 3s - a \quad \text{ist} \quad . \quad . \quad 1)$$

Für Abb. 6 ergibt sich z. B. $v = 3 + 2 = 5$; bei $s = 3$ und $a = 4$ wird $3s - a = 9 - 4 = 5$, so daß diese Grundform statisch bestimmt ist.

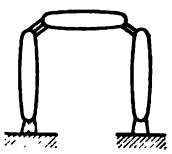


Abb. 6.

Ergibt die Gegenüberstellung der Unbekannten mit den vorhandenen Gleichungen die Beziehung

$$v + a = 3s + m \quad \text{oder} \quad v + a - 3s = m \quad . \quad 2)$$

so sind außer den $3s$ Gleichgewichtsbedingungen noch m Elastizitätsgleichungen erforderlich, um die $v + a$ unbekannten Stäbe zu ermitteln. In diesem Falle wird das System $m$fach statisch unbestimmt genannt.

Werden die in einer Ecke zusammenstoßenden Stäbe starr miteinander verbunden, wie bei a und c der Abb. 7, so sind zu der steifen Eckverbindung drei Verbindungsstäbe erforderlich. Bei b dagegen sind für

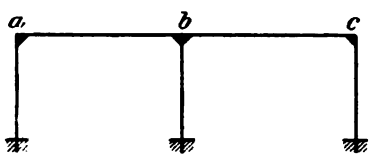


Abb. 7a.

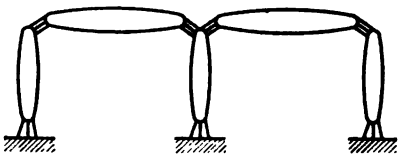


Abb. 7b.

die dort zusammenstoßenden drei Stäbe $2 \cdot 3$ Verbindungsstäbe nötig. Im folgenden werden Ecken wie bei a und c als einfache, solche wie bei b als doppelte steife Knoten bezeichnet werden.

a) Der dreiseitige Rahmen mit Fußgelenken (Abb. 8). Die Zahl der Stäbe zur Verbindung der $s = 3$ Scheiben ist $v = 2 \cdot 3 = 6$, da jede starre Eckverbindung drei Verbindungsstäben entspricht und die Zahl der Auflagerbedingungen $a = 2 \cdot 2 = 4$. Nach Gleichung 2) ergibt sich

$$m = v + a - 3s = 6 + 4 - 9 = 1.$$

Die Grundform ist somit einfach statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Größe wird in der Regel der wagerechte Schub H angesehen, der in derselben Weise wie beim Zweigelenkbogen auf das Widerlager ausgeübt wird.

b) Der dreiseitige Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen (Abb. 9). Während die Anzahl der Scheiben $s = 3$ und die der Verbindungsstäbe $v = 2 \cdot 3 = 6$, also genau ebenso groß ist wie bei dem dreiseitigen Rahmen mit Fußgelenken, wird hier die Zahl der unbekannten Auflagerbedingungen $a = 2 \cdot 3 = 6$ und somit

$$m = v + a - 3s = 6 + 6 - 9 = 3.$$

Die Grundform ist somit dreifach statisch unbestimmt und gleicht vollständig dem fest eingespannten Bogen. Als unbestimmbare Größen werden in der Regel die beiden Seitenkräfte X und Y, sowie das Biegungsmoment Z des einen, statisch nicht bestimmbaren Kämpferdrucks gewählt.

c) Der durchlaufende Träger mit gelenkigen Stützen (Abb. 10). Ist n die Zahl der vorhandenen, oben und unten gelenkigen Zwischenstützen, so erscheint jede derselben nur als je eine Auflagerbedingung, wie in Abb. 14c. Demnach ist bei $s = n + 1$ Scheiben die Zahl der Verbindungsstäbe $v = n \cdot 3$ und die Zahl der Auflagerbedingungen $a = 2 + n + 1 = n + 3$, also $m = v + a - 3s = 3n + (n + 3) - 3(n + 1) = n$. Der Träger ist demnach $n$fach statisch unbestimmt.

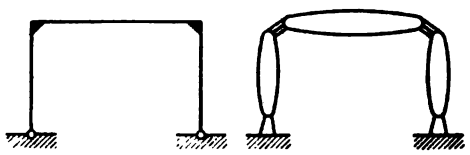


Abb. 8.

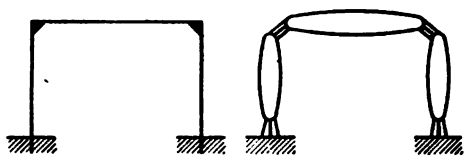


Abb. 9.

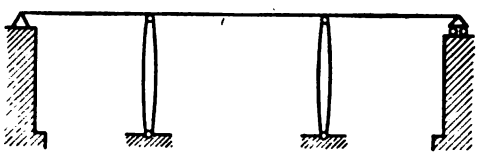


Abb. 10.

Abb. 11.

Wären dagegen die Zwischenstützen mit ihrem Fuß fest eingespannt, am oberen Ende aber mit dem Träger gelenkig, jedoch unverschieblich verbunden, so ist die Zahl der Scheiben ähnlich wie in Abb. 14b $s = 2n + 1$, die Zahl der Verbindungsstäbe $v = n(3 + 2) = 5n$ und die Zahl der Auflagerbedingungen jedoch $a = 2 + n \cdot 3 + 1 = 3n + 3$, also

$$m = v + a - 3s = 5n + (3n + 3) - 3(2n + 1) = 2n.$$

Der Träger wäre dann $2n$fach statisch unbestimmt. Allerdings bleiben die n wagerechten Widerstände der Kopfgelenke der Pfeiler meist unbeachtet.

d) Durchlaufende Träger mit fest verbundenen Zwischenstützen. Bei einem durchlaufenden Träger mit n Zwischenstützen ist die Zahl der Scheiben $s = 2n + 1$ und die Zahl der Verbindungsstäbe $v = n \cdot 2 \cdot 3 = 6n$. Wären die Zwischenstützen oben fest eingespannt, dagegen am Fuße mit Gelenken ausgebildet, so ist die Zahl der Auflagerbedingungen $a = 2 + 2n + 1 = 2n + 3$. Folglich

$$m = v + a - 3s = 6n + (2n + 3) - 3(2n + 1) = 2n.$$

Bei n solchen Zwischenstützen mit Fußgelenken ist die Grundform also $2n$fach statisch unbestimmt.

Sind die Zwischenstützen dagegen nach Abb. 11 auch am Fuß fest eingespannt, so ist $a = 3n + 3$, also

$$m = v + a - 3s$$
$$= 6n + (3n + 3)$$
$$- 3(2n + 1) = 3n.$$

Die Grundform ist dann bei n fest eingespannten Zwischenstützen $3n$fach statisch unbestimmt.

e) Durchlaufende Träger mit fest verbundenen Zwischenstützen und mit Endpfosten. Bei n Zwischenstützen ist die Zahl der Scheiben $s = 2n + 3$ und die Zahl der Verbindungsstäbe $v = 3 + n \cdot 2 \cdot 3 + 3 = 6(n + 1)$. Sind die Zwischen- und die Endstützen mit Fußgelenken ausgebildet, (Abb. 12) so ist die Zahl der Auflagerbedingungen $a = 2 \cdot (n + 2)$. Folglich ergibt sich

$$m = v + a - 3s =$$
$$6(n + 1) + 2(n + 2)$$
$$- 3(2n + 3)$$
$$= 2n + 1.$$

Gegenüber der freien Lagerung der Trägerenden (Fall c) wird somit durch Hinzufügen der beiden Endpfosten mit Fußgelenken die statische Unbestimmtheit um 1 erhöht, näm-

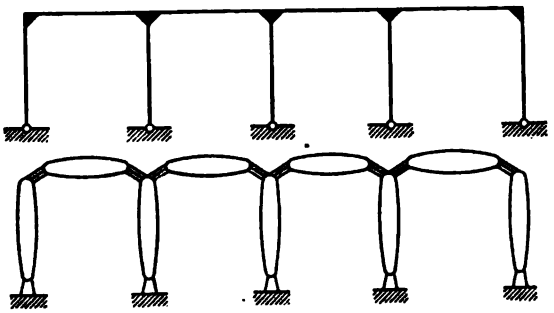


Abb. 12.

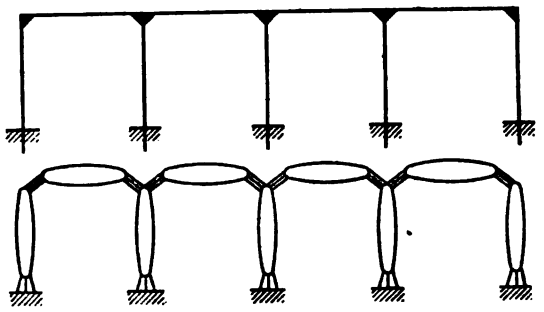


Abb. 13.

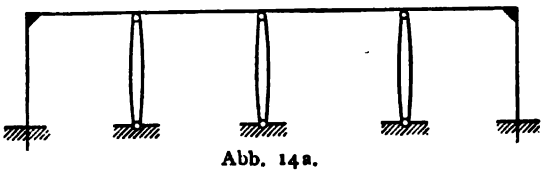


Abb. 14a.

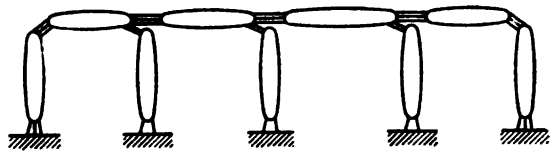


Abb. 14b.

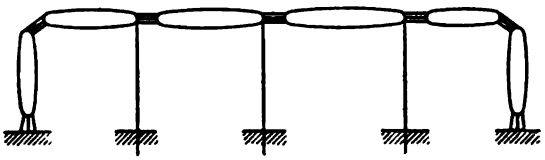


Abb. 14c.

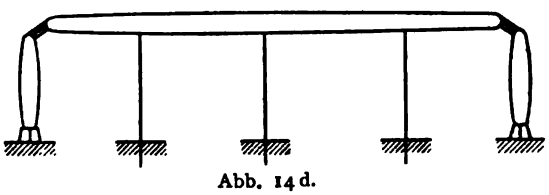


Abb. 14d.

lich auf $2n+1$, also in ganz ähnlicher Weise wie beim dreiseitigen Gelenkrahmen gegenüber dem einfachen Balken.

Sind dagegen die Mittel- und die Endstützen auch am Fuße fest eingespannt (Abb. 13), so wird die Zahl der Auflagerbedingungen $a=3+n\cdot 3+3=3\cdot(n+2)$. Man erhält dann

$$m=v+a-3s=6(n+1)+3(n+2)-3(2n+3)=3n+3.$$

Endlich können die Zwischenstützen auch als Pendelsäulen ausgebildet werden, also mit einem Kopf- und einem Fußgelenk nach Abb. 14a. Dann ist nach Abb. 14b die Anzahl der Scheiben $s=2n+3$, die der Verbindungsstäbe $v=n(2+3)+2\cdot 3=5n+6$, während die Zahl der Auflagerbedingungen sich zu $a=2n+2\cdot 3$ ergibt. Folglich wird

$$m=v+a-3s=(5n+6)+(2n+6)-3(2n+3)=n+3.$$

Diese Grundform ist somit $(n+3)$fach statisch unbestimmt. Man kann sich dieselbe aus einem dreiseitigen Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen entstanden denken, dessen dreifache Unbestimmtheit durch die n Pendelstützen um n erhöht wird.

Faßt man diese Grundform so auf, daß nach Abb. 14c die Pendelstützen nicht als Scheiben, sondern als einfache Stützstäbe angesehen werden, so wird $s=n+3$; ferner $v=3n+2\cdot 3$ und $a=n+2\cdot 3$; also wiederum

$$m=v+a-3s=(3n+6)+(n+6)-3(n+3)=n+3$$

Nach Abb. 14d kann man endlich den durchlaufenden wagerechten Balken als eine zusammenhängende Scheibe betrachten. Dann ergibt sich $s=3$; $v=2\cdot 3$ und $a=n+2\cdot 3$; somit auch hier wieder

$$m=v+a-3s=6+(n+6)-3\cdot 3=n+3.$$

Diese drei verschiedenen Auffassungsarten derselben Grundform nach Abb. 14b, 14c und 14d mögen als Beispiel dafür dienen, wie die Betrachtung der Tragwerke als Scheibenverbindungen sicher und einfach zur Bestimmung der statischen Unbestimmtheit führt.

f) Vierseitige Rahmen (Abb. 15). Da die Anzahl der Scheiben $s=4$, die der Verbindungsstäbe $v=4\cdot 3=12$ und die der Auflager-

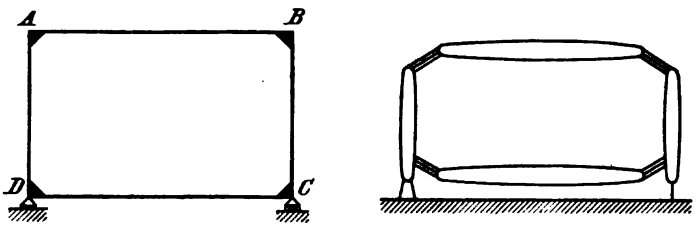


Abb. 15.

bedingungen bei statisch bestimmter Stützung nach Abb. 15, $a=1+2=3$ ist, so wird

$$m=v+a-3s=12+3-12=3.$$

Diese Grundform des einfachen Viereckgefaches ist somit dreifach statisch unbestimmt.

g) Das doppelte Viereckssgefach (Abb. 16). Die Anzahl der Scheiben ist hier $s = 7$, die der Verbindungsstäbe $v = 8 \cdot 3 = 24$ und die der Auflagerbedingungen unter der Annahme statisch bestimmter Stützung $a = 3$, so daß

$$m = v + a - 3s = 24 + 3 - 21 = 6,$$

das Stabwerk somit 6fach statisch unbestimmt ist.

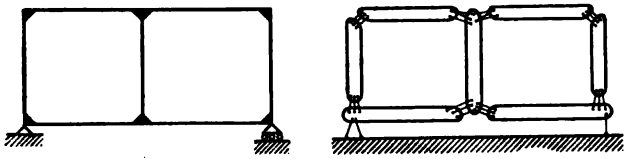


Abb. 16.

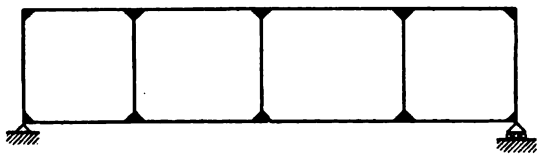


Abb. 17a.

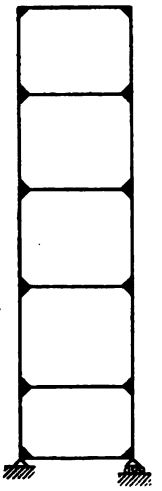


Abb. 17b.

h) Das Pfostenfachwerk (Abb. 17). Nach S. 7 unterscheidet man zur besseren Uebersicht einfache Knoten, in denen nur zwei Stäbe zusammenstoßen, also die Zahl der Verbindungsstäbe $v = 3$ ist, und doppelte Knoten, in denen drei Stäbe zusammenstoßen, mit $v = 2 \cdot 3 = 6$. So ergeben sich bei n Feldern vier einfache und $2 \cdot (n - 1)$ doppelte Knoten, also insgesamt $v = 4 \cdot 3 + 2 (n - 1) \cdot 6 = 12\, n$ Verbindungsstäbe. Da die Zahl der Scheiben $s = 3\, n + 1$, die der Auflagerbedingungen bei statisch bestimmter Stützung $a = 3$ beträgt, wird

$$m = v + a - 3s = 12\, n + 3 - 3 \cdot (3\, n + 1) = 3\, n.$$

Ein statisch bestimmt gelagertes Pfostenfachwerk mit n Gefachen ist somit $3\, n$fach statisch unbestimmt, gleichgiltig, ob dasselbe nach Abb. 17a wagerecht liegt oder nach Abb. 17b aufrecht steht.

Während im allgemeinen als statisch unbestimmbare Größen die Stützkräfte der Träger oder die in einem passend gelegenen Schnitte wirkenden Kräfte und Biegungsmomente angesehen werden, soll im folgenden durchgängig eine andere Größe eingeführt werden, die wir als Einspannungsgrad μ bezeichnen wollen.

Die statische Bedeutung dieses Wertes geht aus folgender Betrachtung hervor.

Durch die Einspannung des Balkens AB (Abb. 18) in den Rah-

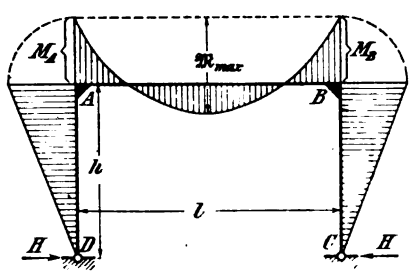


Abb. 18.

menecken wird z. B. bei gleichmäßig verteilter Belastung p die den Biegungsmomenten des frei gestützten Balkens AB entsprechende Momentenparabel mit der Pfeilhöhe $\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l^2}{8}$ um ein gewisses Maß, nämlich um die Größe des Eckmoments M_A über die Grund- oder Schlußlinie nach oben zu verschoben. Die Aufgabe, die statisch unbestimmte Größe zu ermitteln, ist dann gelöst, wenn das Verhältnis

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}}$$

bestimmt ist. Dieser Ausdruck hat für den Konstrukteur deswegen eine große Bedeutung, weil er, in Hundertteilen ausgedrückt, den Wirkungsgrad der Einspannung, also den Effekt angibt, der durch die starre Verbindung von Balken und Pfosten erzielt wird. Je größer dieser Wert μ_A ist, um so beträchtlicher ist die Verminderung des Moments $\mathfrak{M}_{max}$ in der Balkenmitte, das nach Abb. 18 den Wert $M_m = \mathfrak{M}_{max} - M_A$ annimmt. Sobald der Wert μ_A nach dem im II. Abschnitt dargelegten, äußerst einfachen Verfahren ermittelt ist, so ist $M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_{max} = \mu_A \cdot \frac{p\,l^2}{8}$ bestimmt und damit auch die Momentenverteilung sowie der Rahmenschub $H = \frac{M_A}{h}$.

In gleicher Weise werden beim dreiseitigen Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen und beim vierseitigen Rahmen die Werte

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}},\quad \mu_B = \frac{M_B}{\mathfrak{M}_{max}} \text{ und } \mu_C = \frac{M_C}{\mathfrak{M}_{max}}$$

als die drei statisch nicht bestimmbaren Größen eingeführt, aus denen sich in einfacher Weise die gesuchten Eckmomente des Rahmens M_A, M_B und M_C berechnen lassen. Das vierte Eckmoment M_D ist dann eine statisch bestimmbare Größe und unmittelbar aus den anderen drei Eckmomenten und der Belastung zu finden.

Im folgenden II. Abschnitt sind die Ausdrücke für den Einspannungsgrad μ für verschiedene Belastungsfälle hergeleitet. Mit dem Wert $\mathfrak{M}_{max}$ ist jeweils das größte positive Biegungsmoment bezeichnet, das bei freier Stützung im belasteten Balken auftritt.

2. Die statischen Unklarheiten.

Bei der Erörterung der soeben betrachteten statischen Unbestimmtheiten bleiben die Eigenschaften des Baustoffes und des Baugrundes außer Betracht. Unter Zugrundelegung der im zweiten Teile näher erläuterten Annahmen für den Baustoff und unter Voraussetzung vollkommener Starrheit der Stützkörper kann die Ermittlung der Spannungen mathematisch genau erfolgen.

Bei der Ausführung der Bauwerke treten aber außerdem noch stets gewisse Einflüsse auf, die einmal auf der Ungleichmäßigkeit der Eigenschaften des Baustoffs, vor allem aber auf der Unzuverlässigkeit des Baugrundes beruhen. Die bei der Betrachtung der Grundformen erörterten Stützungsarten mit frei drehbaren Gelenken oder aber mit fester Einspannung sind, streng genommen, beide nicht möglich, sondern nur als

Grenzfälle anzusehen, die in der Ausführung nicht vollkommen zu erreichen sind. Diese durch keine Rechnung zu fassenden Einflüsse, die nur auf Grund von Versuchen und Beobachtungen geschätzt werden können, mögen zum Unterschied von der statischen Unbestimmtheit als statische Unklarheiten bezeichnet werden.

Die Fußgelenke der dreiseitigen Rahmen aus Eisenbeton werden im Hochbau in der Regel als Kipplager oder als Wälzgelenke in sorgfältiger Weise ausgebildet. Im Brückenbau dagegen stellt man die Rahmenpfosten in der Regel unmittelbar auf den tragfähigen Baugrund oder auf besondere Gründungskörper aus Beton, sieht also von der Ausbildung besonderer Gelenke an dieser Stelle ab. In diesem Falle ist also weder die freie Drehbarkeit des unteren Pfostenendes nach Abb. 19, noch aber in Anbetracht der Nachgiebigkeit des Baugrundes eine volle

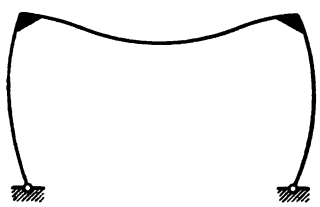


Abb. 19.

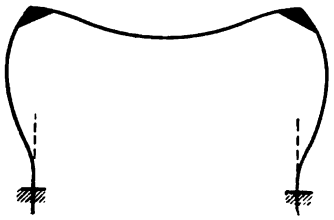


Abb. 20.

feste Einspannung nach Abb. 20 gewährleistet. Da die wirkliche Formänderung zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt, so ist bei der Bemessung und insbesondere bei der Anordnung der Eiseneinlagen jeder von beiden angemessen zu berücksichtigen, der Wirkungsgrad der Einspannung also schätzungsweise anzunehmen.

Sind die Pfosten beim dreiseitigen Rahmen hinterfüllt, so wirkt sowohl der aktive Erddruck mit seinen bekannten Unklarheiten, als auch der passive Erddruck, der in der Rechnung stets vernachlässigt werden muß, aber wohl imstande ist, unter gewissen Verhältnissen das Bild der Formänderung und somit die Spannungen wesentlich zu beeinflussen.

Bei den im Hochbau häufig verwendeten durchlaufenden Trägern wird die freie Drehbarkeit der Trägerenden meist durch das darüber lastende Mauerwerk verhindert, so daß eine Einspannung vorhanden ist, deren Größe aber nicht mit Bestimmtheit festgesetzt werden kann. Eine weitere statische Unklarheit entsteht ferner selbst bei einwandfreier Gründung dann, wenn die einzelnen Stützen verschieden belastet oder aus verschiedenartigem Baustoff ausgeführt sind und dann auch verschiedenartige, zum Teil sogar unberechenbare, bleibende Formänderungen bei der Herstellung und bei der Belastung aufweisen können, wie z. B. bei Ausführung der Umfassungswände in Mauerwerk und der Zwischenstützen in Eisenbeton oder Eisen.

Beim vierseitigen Rahmen der Abb. 15 wurde eine statisch bestimmte Stützung angenommen, die jedoch in Wirklichkeit kaum jemals so klar ausgebildet ist. Bei rahmenartigen Durchlässen, für welche diese

Grundform vielfache Anwendung findet, bildet vielmehr in der Regel die große untere Platte die Auflagerfläche auf dem Erdreich. Der auf den unteren Balken als Belastung wirkende Bodendruck verteilt sich dann etwa in der nach Abb. 21 angedeuteten, aber nicht genau anzugebenden Art, so daß unter den steifen Pfosten der größte, in der Mitte der nach oben ausweichenden Platte jedoch der kleinste Druck entsteht.

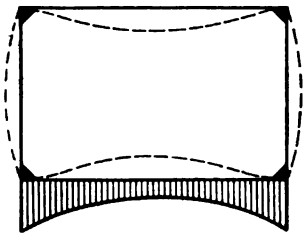


Abb. 21.

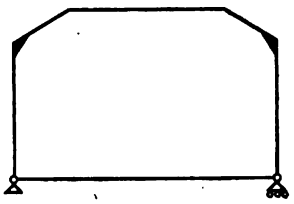


Abb. 22.

Bei Brücken nach Abb. 22, wie sie öfter in den Vereinigten Staaten von Nordamerika ausgeführt werden, wird häufig der dreiseitige Rahmen mit einem unteren Zugband ausgestattet, um an Widerlagsmauerwerk zu sparen, oder aber es wird auch eine durchgehende geschlossene Platte angeordnet, auf der die Pfosten frei aufstehen. Hier wird die klare Wirkung der Grundform als einfach statisch unbestimmter Rahmen beeinträchtigt durch die Steifigkeit des Zugbandes einerseits, in erhöhtem Maße aber durch Unklarheit der Stützung selbst. Infolgedessen treten auch hier noch weitere statische Unbestimmtheiten hinzu, die meist nicht in Rechnung gestellt werden können. Die Grundform der Abb. 22 ist also dann ein Mittelding zwischen dem dreiseitigen und dem vierseitigen Rahmen.

Während die Eisenbauten wohl stets auf Gründungskörpern aus Mauerwerk oder Beton stehen, werden die Eisenbetonkörper häufig unmittelbar auf das Erdreich gesetzt. Dadurch lassen sich zwar infolge des Wegfalls besonderer Gründungskörper oft Kostenersparnisse erzielen, diese müssen aber wegen der meist nicht genau anzugebenden Stützungsart durch eine neue statische Unklarheit erkauft werden.

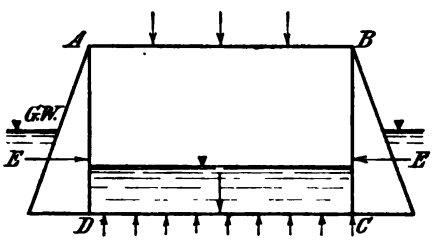


Abb. 23.

Die Belastung eines solchen vierseitigen Rahmens (Abb. 23) erfolgt außer durch die Verkehrslast über dem Balken AB und den auf die Pfosten AD und BC wirkenden Erddruck häufig auch noch durch den Auftrieb des Wasserdrucks, der auf die untere Fläche der Sohlenplatte CD wirkt und ganz oder teilweise an die Stelle der durch die Auflast bewirkten Bodenpressung tritt. Hierdurch entsteht eine Verbiegung der Platte nach oben, die allerdings durch das Eigengewicht der Platte und ihre Nutzlast, wenn z. B. der Durchlaß mit Wasser gefüllt ist, zum Teil wieder aufgehoben

wird. Da bei diesen Rahmen infolge einseitiger wagerechter Kräfte sehr starke Formänderungen auftreten, ist schließlich für die Bemessung auch die Feststellung wichtig, ob die Wirkung des Erddrucks dauernd auf beiden Seiten vorhanden ist.

Diese statischen Unklarheiten, die vom entwerfenden Ingenieur niemals zahlenmäßig anzugeben, sondern höchstens zu schätzen sind, können unter Umständen zur Verminderung der Sicherheit, ja sogar zur Gefährdung des Bauwerks führen, wie es z. B. bekanntlich infolge einer Stützensenkung beim durchlaufenden Träger oder einer wagerechten Widerlagerverschiebung beim dreiseitigen Rahmen der Fall ist. Einer solchen Gefährdung infolge statischer Unklarheiten muß durch eine einwandfreie Gründung vorgebeugt werden, wenn in einem solchen Falle nicht überhaupt von der Verwendung dieser Grundformen vollständig abzusehen ist.

B. Die statische Grundform des Trägers im Querschnitt.

Während bei Eisenbauten auch im Querschnitt auf eine möglichst klare, statisch bestimmte Stützung der Querträger, der Längsträger und der Fahrbahnabdeckung Gewicht gelegt wird, sind im Eisenbetonbau stets Balken und Platten starr miteinander verbunden. Im folgenden möge die vielfach statische Unbestimmtheit des Querschnitts der Abb. 24 erörtert werden, der als allgemein übliche Eisenbetongrundform anzusehen ist.

Abb. 24.

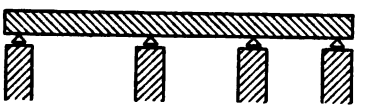


Abb. 25.

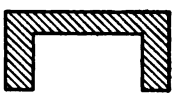


Abb. 26.

1. Der Einspannungsgrad bei starrer Stützung.

Die freie Drehbarkeit der einzelnen Felder der belasteten Platte über den von den Balken gebildeten Stützpunkten wird einmal durch den Zusammenhalt derselben als über die einzelnen Oeffnungen durchlaufender Träger nach Abb. 25 sowie ferner durch die starre Verbindung der Platte mit den Balken nach Abb. 26 behindert.

Dabei wird jedoch zunächst eine unwandelbar starre Stützung der Platte vorausgesetzt, also die Möglichkeit einer Einsenkung der die Stützen bildenden Balken, die in Wirklichkeit stets vorhanden ist, außer Betracht gelassen. Wie sehr sich aber das Gesamtbild der Momentenverteilung und die Beanspruchungen der Platte unter der Annahme elastisch senkbarer Stützen ändern können, möge aus der weiter unten stehenden Betrachtung (S. 17) ersehen werden.

Der statisch unbestimmte Einspannungsgrad $\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}}$, womit wiederum, wie oben, das Verhältnis des Stützenmomentes M_A zum größten Moment $\mathfrak{M}_{max}$, das bei freier Lagerung des betrachteten Balkenstückes auf zwei Stützen entstehen würde, bezeichnet werden soll (Abb. 28), setzt sich somit unter der Annahme starrer Stützung aus einem Wert μ_A', der

durch den Zusammenhalt mit den Nachbaröffnungen durch die sogenannte Kontinuität entsteht, und ferner aus einem zweiten Wert μ_A'' zusammen,

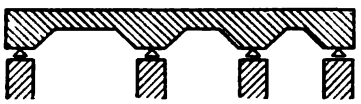


Abb. 27.

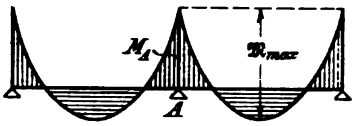
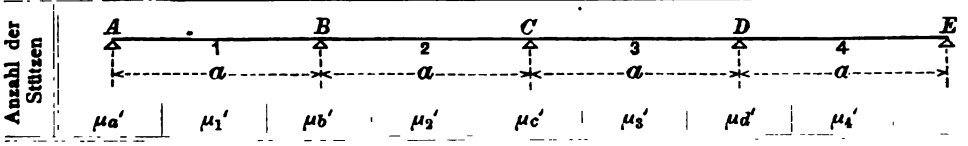


Abb. 28.

der durch die feste Verbindung der Platte mit den Balken hervorgerufen wird.

Biegungsmomente durchlaufender Träger auf starren Stützen gleichen Abstandes.



I. Einfluß[1]) gleichförmig verteilter Belastung p.

3	o	+ 0,562	− 1,000						$M = \mu' \cdot \frac{pa^2}{8}$
	0	**+ 0,766**	**− 1,000**						
4	o	+ 0,640	− 0,800	+ 0,200					
	0	**+ 0,810**	**− 0,933**	**+ 0,600**					
5	o	+ 0,618	− 0,857	+ 0,291	− 0,571				
	0	**+ 0,797**	**− 0,964**	**+ 0,644**	**− 0,857**				
6	o	+ 0,623	− 0,842	+ 0,266	− 0,632	+ 0,369			
	0	**+ 0,801**	**− 0,957**	**+ 0,632**	**− 0,890**	**+ 0,684**			
7	o	+ 0,622	− 0,846	+ 0,272	− 0,617	+ 0,346	− 0,692		
	0	**+ 0,800**	**− 0,959**	**+ 0,643**	**− 0,884**	**+ 0,672**	**− 0,923**		
8	o	+ 0,622	− 0,845	+ 0,270	− 0,620	+ 0,352	− 0,676	+ 0,324	
	0	**+ 0,800**	**− 0,958**	**+ 0,635**	**− 0,884**	**+ 0,676**	**− 0,915**	**+ 0,662**	

II. Einfluß einer wandernden Einzellast P.[2])

3	o	+ 0,830	− 0,387						$M = \mu' \cdot \frac{Pa}{4}$
	—	(0,432)	(0,577)						
4	o	+ 0,820	− 0,411	+ 0,700					
	—	(0,428)	(0,577)	(0,500)					
∞	o	+ 0,819	− 0,413	+ 0,621			− 0,334	+ 0,683	
	—	(0,427)	(0,577)	(0,548)			(0,620)	(0,500)	

Die Werte μ_A' lassen sich rechnerisch nach der Lehre vom durchlaufenden Träger ohne weiteres ermitteln. Sie sind z. B. für eine gleichmäßig verteilte Belastung p und für eine wandernde Einzellast P unter Zugrundelegung einer Platte mit gleichen Stützweiten a in Uebersicht I

[1]) Nur bis zur Trägermitte angegeben, da die Zahlen sich symmetrisch wiederholen.
[2]) Die Klammerwerte bedeuten den Abstand der Last von der links gelegenen Stütze.

und II zusammengestellt. Die gesuchten Momente ergeben sich aus der Uebersicht I für gleichmäßig verteilte Belastung[1]) zu $M_A = \mu_A' \cdot \frac{p \cdot a^2}{8}$ und aus Uebersicht II für eine wandernde Einzellast P zu $M_A = \mu_A' \cdot \frac{P \cdot a}{4}$.

In ähnlicher Weise lassen sich auch bei verschieden großen Oeffnungen für verschiedene Verhältnisse der Stützweiten $a_1 : a_2 : a_3$ solche Werte μ_A' nach den bereits bekannten vorhandenen Tabellen angeben.

Der zweite Wert μ_A'' dagegen ist auf rechnerischem Wege in befriedigender Weise nicht zu bestimmen, da die Verdrehung der Endtangente an die Biegelinie um den Winkel α schon bei dem in Abb. 29 dargestellten einfachsten Fall hauptsächlich von dem Verdrehungswiderstand des am Ende festgehaltenen Balkens abhängt. Würde man selbst diesen Wert für einen rechteckigen Querschnitt ermittelt haben, so bleibt immer noch die Schwierigkeit, daß auch die Verdrehung durch die Steifigkeit der zwischen den beiden Balken gespannten Platte wiederum behindert wird.

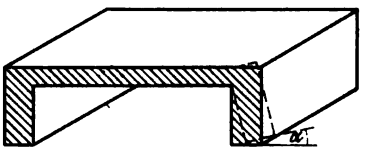


Abb. 29.

Ein weiterer Einfluß auf die Formänderung der Platte wird durch die sogenannten Vouten, d. s. die Verstärkungen der Platte an ihrem Uebergang in den Balken, ausgeübt (Abb. 27). Da diese Verstärkung im wesentlichen eine Vergrößerung des mittleren Trägheitsmoments bedeutet, so kann ihr Einfluß auf statischem Wege ohne Schwierigkeit festgestellt werden. Er ist für die Biegungsmomente und den Einspannungsgrad der einzelnen Plattenfelder bei der üblichen Annahme starrer Stützung nur verhältnismäßig klein, gewinnt aber an Bedeutung bei elastischer Senkbarkeit der Stützen, weil dann das Verhältnis der Steifigkeit der Stützen zu der des ganzen Trägers in Frage kommt.

2. Der Einfluß elastischer Stützensenkung.

Von erheblich schwerwiegenderer Bedeutung als diese soeben betrachteten Einflüsse ist die elastische Senkbarkeit der Stützen, die hier durch die Balken gebildet werden. Betrachten wir z. B. die auf drei Balken lagernde Platte einer Balkenbrücke, auf welche eine über dem mittleren Balken stehende Einzellast wirkt (Abb. 30), so würde diese Last bei Annahme starrer Stützung nur den mittleren Träger beanspruchen, die Platte selbst aber biegungsfrei, also spannungslos anzunehmen sein. Da jedoch der mittlere Balken unter der Last P eine gewisse Durchbiegung erleidet und die Platte infolge ihrer untrennbaren Verbindung mit dem Balken an dieser Durchbiegung teilnehmen muß, so wird dadurch ein Teil der Last nach den äußeren Balken übertragen, der mittlere Balken aber um den gleichen Betrag entlastet.

[1]) Die fettgedruckten Zahlen der Uebersicht I sind die Größtwerte, die bei feldweiser Belastung in ungünstigster Anordnung entstehen. Die übrigen Zahlen gelten für Vollbelastung des ganzen Trägers.

Die Größe des in der Platte entstehenden Biegungsmoments ist sowohl von der Steifigkeit der Platte selbst, als auch hauptsächlich von der Steifigkeit der Balken abhängig. Je größer die Steifigkeit der Platte gegenüber der der Träger ist, desto größer ist auch der durch die Platte nach den entfernteren Balken übertragene Anteil der Belastung.

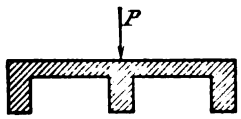


Abb. 30.

Die Momentenlinie des durch eine gleichförmig verteilte Last p belasteten einfachen Trägers ist bekanntlich eine Parabel, die Momentenlinie der Stützendrücke ein Vieleck, das von der unbegrenzten Parabel die wirksame Momentenfläche abtrennt (Abb. 31a u. 31b). Trägt man die zwischen der Parabel und dem Vieleck abzugreifenden lotrechten Entfernungen dieser beiden Begrenzungen als Ordinaten auf, so

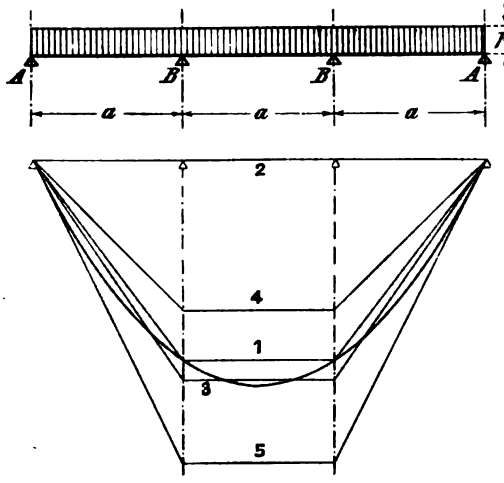


Abb. 31a u. 31b.

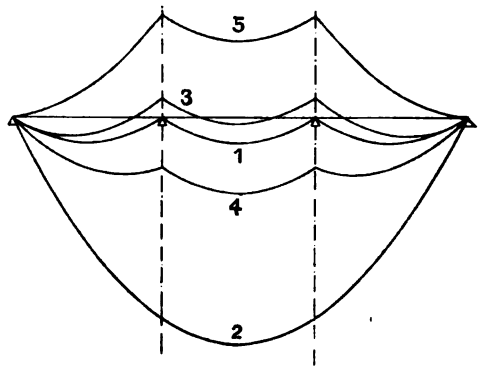


Abb. 31c.

erhält man die Darstellung der Abb. 31c. Aus der Betrachtung dieser beiden Abbildungen, die einem nach Abb. 31a vollbelasteten Träger auf vier Stützen gleichen Abstandes entsprechen, ergeben sich folgende wichtige Grenzfälle:

1. Ist der Träger über den Stützen durchschnitten (Abb. 32), so ist die Momentenfläche der Stützendrücke ein Vieleck, dessen Eckpunkte in den Schnittpunkten der Parabel mit den Stützensenkrechten liegen. Die Steifigkeit der Stützen sowohl als auch die der Trägerstücke ist sodann ohne Einfluß auf die Größe der Biegungsmomente, und es ist daher

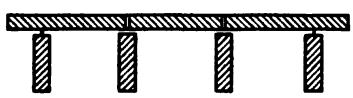


Abb. 32.

der Stützendruck an der äußeren Stütze $A = \frac{p \cdot a}{2}$

der Druck an der inneren Stütze $B = p \cdot a$

ferner das Stützenmoment $M_B = 0$

das Biegungsmoment in der Trägermitte $M_m = \frac{p a^2}{8}$.

2. Die inneren Stützen B seien wirkungslos, d. h. unendlich schwach gegenüber den äußeren Stützen A (Abb. 33). Sie üben also keinen Gegendruck aus; der Träger liegt auf den äußeren Stützen frei auf, und die Schlußlinie der Momentenfläche ist eine Gerade.

Die Stützendrücke sind $A = \frac{3}{2} p a$ und $B = 0$

die Momente $M_B = p \cdot a^2$ und $M_m = \frac{9}{8} p a^2$.

Abb. 33.

Abb. 34.

Der Vergleichswert $\mu = M : \frac{p a^2}{8}$, gegenüber dem Biegungsmoment eines einfachen Trägers (Fall 1), wird an den inneren Stützen $\mu_B = 8{,}0$, in Trägermitte $\mu_m = 9{,}0$.

3. Der Träger liege auf vier starren Stützen, d. h. die Steifigkeit der Stützen sei unendlich groß gegenüber der der Platte (Abb. 34). Die Schlußlinie durchschneidet die Parabel viermal, und es wird

$$A = \frac{4}{10} p a; \quad B = \frac{11}{10} p a,$$

$$M_B = -\frac{p a^2}{10}; \quad M_m = \frac{p a^2}{40},$$

folglich $\mu_B = -0{,}8; \quad \mu_m = +0{,}2.$

4. Die Steifigkeit der Platte sei unendlich groß gegenüber der der Stützen (Abb. 35). Sie verursacht dann eine gleich große Senkung aller vier Stützen, die demnach auch gleiche Drücke erhalten müssen. Es wird

$$A = B = \frac{3}{4} p a$$

$$M_B = +\frac{p a^2}{4}; \quad M_m = +\frac{3 p a^2}{8}$$

$$\mu_B = +2{,}0; \quad \mu_m = +3{,}0.$$

Abb. 35.

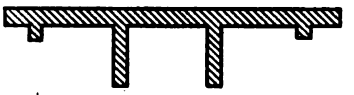


Abb. 36.

5. Die äußeren Stützen A seien wirkungslos, also unendlich schwach gegenüber den inneren Stützen B (Abb. 36). Der Träger wirkt demnach als Konsolträger auf zwei Stützen. Die Momentenlinie der Stützendrücke tangiert die Parabel an den Endpunkten, und es ist

$$A = 0; \quad B = \frac{3}{2} p a$$

$$M_B = -\frac{p a^2}{2}; \quad M_m = -\frac{3}{8} p a^2$$

$$\mu_B = -4{,}0; \quad \mu_m = -3{,}0.$$

Die möglichen Grenzen für einen durchlaufenden Träger auf vier elastischen Stützen, welche sämtlich gleichen Steifigkeitsgrad besitzen, sind durch Fall 3 und 4 gegeben. Zwischen diesen beiden Fällen (Abb. 34 u. 35), denen die Werte $\mu_B = -0{,}8$ und $\mu_B = +2{,}0$, $\mu_m = +0{,}2$ und $\mu_m = +3{,}0$ entsprechen, sind demnach je nach dem Verhältnis der Plattensteifigkeit zu der der Balken die wirklichen Werte der Einspannungsgrößen zu suchen. Haben die Stützen jedoch ungleiche Steifigkeit, d. h. ist unter einer beliebigen Last die Senkung der inneren Stützen eine andere wie die Senkung der äußeren Stützen unter der gleichen Last, so bilden die Fälle 2 und 5 (Abb. 33 u 36) die Grenzen, d. h. die Werte schwanken zwischen

$$\mu_B = +8{,}0 \text{ und } \mu_B = -4{,}0$$
$$\mu_m = +9{,}0 \text{ und } \mu_m = -3{,}0.$$

Im Fall 2 wäre sogar bei Annahme je einer Einzellast P über jeder Stütze das Biegungsmoment im inneren Plattenteil $M = P \cdot a$, wogegen nach den sonst üblichen Annahmen hierbei keine Spannungen auftreten dürften.

Obgleich die Abmessungen, wie sie in der Wirklichkeit vorkommen, naturgemäß die Grenzen sehr erheblich enger stecken, so ist doch ohne weiteres zu sehen, daß die elastische Durchbiegung der Balken einen sehr erheblichen Einfluß auf die Größe der Biegungsmomente in der Platte gewinnen kann, welchem die üblichen angenäherten Rechnungsverfahren kaum annähernd Rechnung tragen, und daß die Vernachlässigung der elastischen Verhältnisse durchaus nicht immer ohne weiteres statthaft ist.

Die Größe des Einflusses der Stützensenkung läßt sich nach Ritter, Graphische Statik III, S. 148 u. f., ermitteln, wenn das „Maß der elastischen Stützensenkung" für den durchlaufenden Träger, in unserem Fall also für die Platte,

$$\varepsilon = \frac{EJ' \cdot \delta}{P \cdot a^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

bekannt ist. In diesem Ausdruck bedeutet δ die Senkung der Stütze unter der Last P, EJ' die Steifigkeitsziffer des tragenden Körpers, in unserem Fall also der Platte, und a die Plattenstützweite.

Zur deutlichen Veranschaulichung des Einflusses der elastischen Stützenmaße werden in der Abb. 37 die Momentenlinien, also der Verlauf der Werte μ für einen vollbelasteten Balken auf vier Stützen, dargestellt. Darin entsprechen die ausgezogenen Linien 0 bis V gleichen Werten von ε für alle Träger, die punktierten Linien dem Fall, daß die äußeren Träger nur halb so steif sind als die inneren, also $\varepsilon_i = 2\,\varepsilon_a$, wogegen die gestrichelten Linien für den entgegengesetzten Fall, also für $2\,\varepsilon_i = \varepsilon_a$ gelten.[1])

Hieraus ersieht man, wie auch schon eine einfache Erwägung lehrt, daß es vorteilhafter ist, die äußeren Balken schwächer zu halten als die

[1]) Bemerkenswert ist der Hinweis auf die Werte ε, die sich für die einzelnen Stützungsfälle der Abb. 31 ergeben, und zwar entsprechen dem Elastizitätsmaß der äußeren bezw. der inneren Träger ε_a bezw. ε_i im zweiten Falle die Werte o bezw. ∞, im dritten Fall o bezw. o, im vierten Fall ∞ bezw. ∞ und im fünften Fall ∞ bezw. o.

inneren, da dann die Abweichung von der Annahme starrer Stützung (Linie o) geringer ist als im umgekehrten Fall.

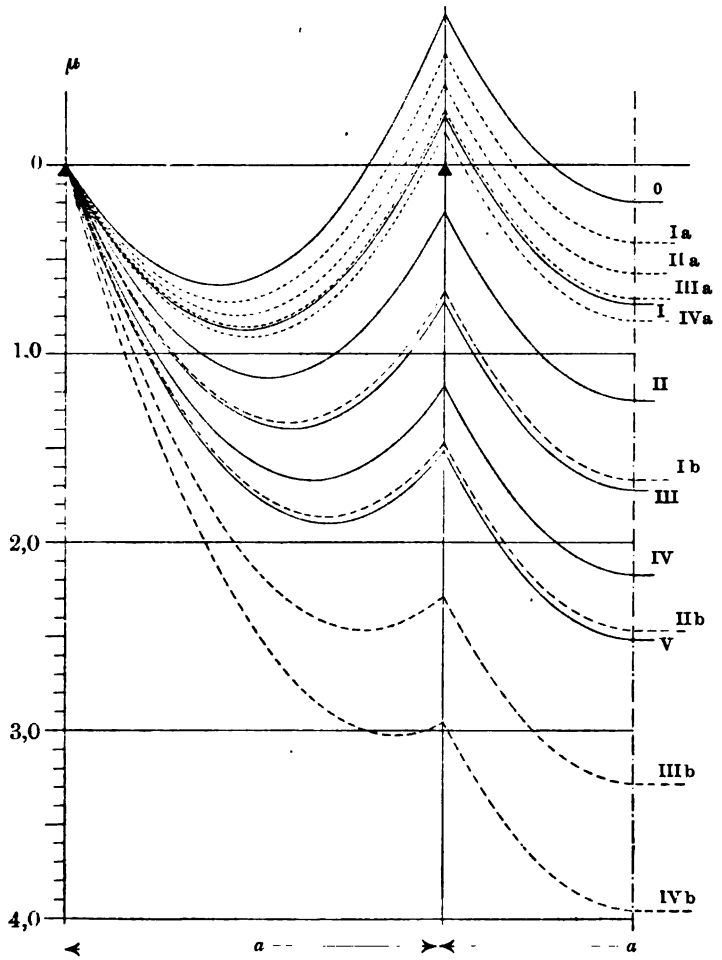


Abb. 37. Biegungsmomente eines Trägers auf vier elastischen Stützen bei gleichförmig verteilter Belastung.

Hierin ist

für Linie Nr.	das Elastizitätsmaß ε_i	ε_a	also
o	o	o	$\varepsilon_i = \varepsilon_a$
I	0,1	0,1	
II	0,2	0,2	
III	0,5	0,5	
IV	1,0	1,0	
V	2,0	2,0	
Ia	0,2	0,1	$\varepsilon = 2\,\varepsilon_a$
IIa	0,5	0,25	
IIIa	1,0	0,5	
IVa	2,0	1,0	
Ib	0,1	0,2	$2\,\varepsilon_i = \varepsilon_a$
IIb	0,25	0,5	
IIIb	0,5	1,0	
IVb	1,0	2,0	

Vergleicht man ferner die Linien des Falles I mit V, des Falles Ia mit IVa, des Falles Ib mit IVb, so erkennt man, daß, je größer die Werte ε, also je größer die Steifigkeitsziffer der Platte EJ' gegenüber der des Balkens EJ, oder je steifer die Platte im Vergleich zum Balken ist, die Berechnung der Platte als durchlaufender Träger auf festen Stützen um so weniger den tatsächlichen Verhältnissen entspricht.

Für die Platte im Querschnitt kommen nach den vorstehenden Ausführungen hauptsächlich drei Einflüsse in Frage und zwar die Kontinuität, also die Verbindung mit den Nachbarfeldern, der Verdrehungswiderstand der Balken und vor allem die elastische Senkbarkeit der stützenden Balken.

Da diese drei Einflüsse meist gleichzeitig wirken, müßte sich ein Einspannungsgrad ergeben, der eine Funktion der entsprechenden Einzel-

werte μ_a', μ_a'' und μ_a''' sein müßte. Eine einwandfreie Ableitung dieser Funktion auf rechnerischem Wege erscheint jedoch vollkommen ausgeschlossen. Dagegen wäre es wohl möglich, auf dem Wege des Versuchs für gewisse Querschnittsformen und Belastungsfälle einen Anhalt über die Größenordnung dieser Einflüsse zu finden. Solange aber derartige Versuche nicht vorliegen, ist der Konstrukteur auf die gewissenhafte Schätzung angewiesen, wozu die vorstehenden Erörterungen einen Anhalt bieten mögen. In vielen Fällen ist er jedoch in der Lage, wenigstens die nachteilige Wirkung stärkerer Formänderungen einzelner Tragwerkteile durch geeignete Maßnahmen einzuschränken, wie z. B. durch Anordnung lastverteilender Querträger bei den Balkenbrücken, so daß dann die Annahme voller Einspannung für die Platte wohl berechtigt sein kann.

Während demnach die statische Grundform des Eisenbetontragwerks im Querschnitt äußerst unklar und daher vielfach statisch unbestimmt ist und sich der scharfen Berechnung entzieht, kann man die Grundform des Tragwerks im Längsschnitt, abgesehen von den erörterten statischen Unklarheiten, in einwandfreier Weise dimensionieren.

II. Formeln für die Einspannungsgrade der Rahmen.

A. Die Bedeutung des Einspannungsgrades.

Die Bemessung statisch unbestimmter Grundformen, z. B. eines dreiseitigen Rahmens aus Eisenbeton (Abb. 38), erfolgt in der Regel in folgender Weise. Zunächst wird unter Berücksichtigung der Grundbedingungen der Aufgabe im Längsschnitt eine Skizze der gewählten Grundform aufgetragen, aus der die Stützweite l und die Balkenhöhe h in der Trägermitte entnommen werden kann.

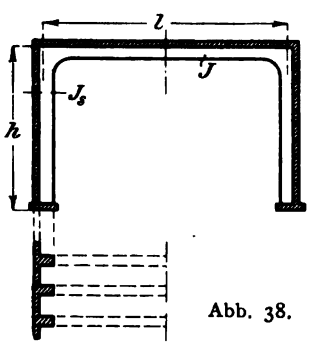


Abb. 38.

In gleicher Weise wird sodann der Balkenquerschnitt und ein wagerechter Schnitt in halber Höhe eines Pfostens einskizziert und das Trägheitsmoment J und J_s in bezug auf die Schwerlinie berechnet,[1]) wobei der Schwerpunkt jeweils angenähert in der Höhe der Plattenunterkante angenommen werden kann.

[1]) Für die Ermittlung des Trägheitsmoments empfiehlt es sich, einen homogenen Betonquerschnitt unter Vernachlässigung sämtlicher Eiseneinlagen zugrunde zu legen, also die Zugzone des Betons voll zu rechnen, die durch die Eiseneinlagen nur verstärkt und nach Eintritt der Rissebildung ersetzt werden soll. Dieses Verfahren scheint in Anbetracht der vielen Ungenauigkeiten und willkürlichen Annahmen bei solchen statisch unbestimmten Grundformen um so mehr empfehlenswert, als in der Regel bei der Bemessung die Größe der Eiseneinlagen noch nicht bekannt ist. Auch kommt bei sämtlichen Spannungsberechnungen statisch unbestimmter Grundformen immer nur das Verhältnis der Trägheitsmomente der einzelnen Bauteile zueinander in Betracht, so daß der hierbei begangene Fehler sich zum größten Teil wieder ausgleicht.

Nunmehr erfolgt in der Regel die genaue, oft sehr zeitraubende Ermittlung der statisch unbestimmbaren Größen nach der Elastizitätslehre. Obwohl häufig die Abmessungen noch gar nicht rechnerisch nachgeprüft worden sind, wird also sogleich eine ausführliche Belastungsprobe auf dem Zeichenbrett vorgenommen, die oft zu wesentlichen notwendigen Abänderungen der gewählten Abmessungen führt und eine Wiederholung der gesamten Rechenarbeit bedingt.

Für den entwerfenden Ingenieur liegt daher das Bedürfnis vor, für die verschiedenen vorkommenden Belastungsfälle der drei- und vierseitigen Rahmen möglichst einfache Beziehungen zwischen den Abmessungen und den Biegungsmomenten zu kennen, um an der Hand dieser Formeln mittels des Rechenschiebers in wenigen Minuten die gewählten Abmessungen nachprüfen und verbessern zu können.[1]) Solche auffallend einfache Beziehungen lassen sich für die Rahmen herleiten durch die Einführung des Begriffs des Einspannungsgrades, der bereits im I. Abschnitt, S. 11, ausführlich erörtert wurde.

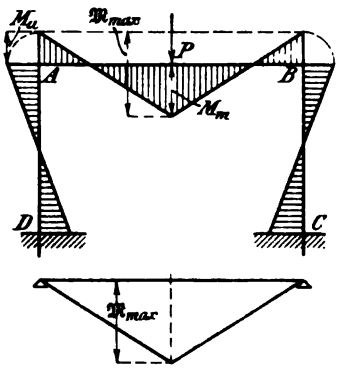


Abb. 39.

Im folgenden seien die Werte des Einspannungsgrades μ als statisch unbestimmbare Größen eingeführt an Stelle der sonst üblichen Werte X, Y, Z für besonders gewählte Stützkräfte oder Biegungsmomente.

Die Einfachheit der damit erzielten Ausdrücke zeigt sich z. B. für den in Abb. 39 dargestellten Fall eines dreiseitigen Rahmens mit fest eingespannten Pfostenfüßen, der durch eine Einzellast in der Balkenmitte belastet wird, in den auf Seite 40 hergeleiteten Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}\mu_A = \dfrac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}} \\ \mu_B = \dfrac{M_B}{\mathfrak{M}_{max}}\end{array}\right\} = -\frac{1}{2+\dfrac{h}{l}\cdot\dfrac{J}{J_s}} = -\frac{1}{2+\nu}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu_C = \dfrac{M_C}{\mathfrak{M}_{max}} \\ \mu_D = \dfrac{M_D}{\mathfrak{M}_{max}}\end{array}\right\} = +\frac{1}{2\left(2+\dfrac{h}{l}\cdot\dfrac{J}{J_s}\right)} = +\frac{1}{2(2+\nu)}.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{M}_{max}$ das Biegungsmoment, das unter der Last entstehen würde, wenn die Balkenenden nicht mit den Pfosten starr verbunden, sondern frei gelagert wären, ferner M_A, M_B, ... das wirklich

[1]) Wie im vorigen Abschnitt erörtert wurde, kommen für die Bemessung der Rahmen zunächst nur die Biegungsmomente in Betracht, während die Stablängskräfte nur bei der genauen Spannungsermittlung, also bei der endgültigen Bestimmung der Eiseneinlagen zu berücksichtigen sind.

auftretende Biegungsmoment an der Rahmenecke $A, B, \ldots$ Bemerkenswert ist, daß der Einspannungsgrad bei dreiseitigen Rahmen für alle Belastungsfälle nur von einer einzigen veränderlichen Größe $\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s}$ abhängt, in der das Verhältnis der Pfostenhöhe h zur Stützweite l und das Verhältnis des Trägheitsmoments des Balkens zu dem des Pfostens zum Ausdruck kommt. Durch die Einführung der Verhältniszahl μ_A der beiden Momente M_A und $\mathfrak{M}_{max}$ erreicht man, daß alle absoluten Werte, die von der Belastung und den Abmessungen abhängen, in den Formeln verschwinden und nur die Grundverhältnisse $h:l$ und $J:J_s$ bestehen bleiben. Es muß sich demnach für alle mathematisch ähnlichen Rahmen mit gleichen Verhältnissen $h:l$ bezw. $J:J_s$ und verschiedenen Stützweiten l bei gleichartiger Belastungsweise immer derselbe Einspannungsgrad μ_A ergeben. Nach dieser Ueberlegung ist wohl der Wegfall aller absoluten Glieder von Abmessungen und Belastungen erklärlich, immerhin ist es aber bemerkenswert, daß die genannten beiden Grundverhältnisse nur in der Verbindung des Produktes $\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s}$, sonst aber in keiner anderen Form auftreten, was der Vereinfachung und praktischen Verwendbarkeit dieser Formeln sehr zustatten kommt. Bei den Ausdrücken des Einspannungsgrades für den vierseitigen Rahmen mit den Trägheitsmomenten J_o für den oberen und J_u für den unteren Balken kommt zu dieser Größe $\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_o}{J_s}$ nur noch die Größe $\omega = \frac{J_o}{J_u}$ hinzu.

Der Schritt von der Verhältniszahl $\mu_A, \mu_B, \ldots$ zu den wirklich auftretenden, also absoluten Biegungsmomenten $M_A, M_B, \ldots$ erfolgt sodann, da

$$M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_{max}$$

ist, in einfachster Weise durch Multiplikation mit dem Moment $\mathfrak{M}_{max}$ des einfachen Balkens.

Außer dem Vorteil der Vereinfachung der Formeln bietet die Einführung des Einspannungsgrades dem entwerfenden Ingenieur noch ein sehr willkommenes Mittel, den Nutzen, der durch die Einspannung erzielt wird, also den Effekt der Einspannung, rasch beurteilen zu können. Wie schon im I. Teil, S. 3, dargelegt wurde, bringt die starre Verbindung der Trägerenden mit den Stützen den Nachteil eines starken, oft sogar bedenklichen Einflusses der Wärme- und Widerlagerverschiebungen mit sich. Außerdem ist hier noch hervorzuheben, daß durch Erhöhung der statischen Unbestimmtheit nicht nur die Rechenarbeit wesentlich vergrößert wird, sondern auch die von der üblichen einfachen statischen Form abweichende schwierigere Ausführung meist eine Erhöhung des Einheitspreises und einen oft ganz erheblichen Zeitverlust bedingt. Es ist daher schon bei der Wahl der Grundform vor allem die grundsätzliche Frage zu entscheiden, ob die durch die Einspannung erzielten Vorteile und Ersparnisse auch wirklich so groß sind, daß die dadurch eingetauschten Nachteile in Kauf genommen werden können. Auch für diese Beurteilung bietet der Einspannungsgrad ein geeignetes Mittel, weil er in Hundert-

teilen die Verringerung der größten Biegungsmomente, also den Effekt der Einspannung angibt, ohne daß dabei die absoluten Werte der Biegungsmomente berechnet zu werden brauchen.

Erwähnt sei noch, daß die hier hergeleiteten Formeln durchaus hinreichend genaue Lösungen der statisch unbestimmten Grundformen bilden, da bei ihnen nur die Wirkung der Längskräfte auf die Formänderung (vergl. S. 29) vernachlässigt ist. Sie können daher auch ohne weiteres zur endgültigen Spannungsberechnung verwendet werden. Falls die Längskräfte ebenfalls berechnet werden sollen, empfiehlt es sich, sie, wie im dritten Teil erörtert wird, mit Hilfe der Mittelkraftlinien für die einzelnen Stäbe zu bestimmen. Da ferner die abgeleiteten Ausdrücke unter der Voraussetzung eines homogenen Baustoffs hergeleitet werden, haben sie sowohl für Eisenbeton als auch für Eisen Gültigkeit.

B. Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Die erste Voraussetzung ist die Annahme eines homogenen Baustoffs. Hierzu kommt ferner die Bedingung, daß die Steifigkeitsziffern der einzelnen Teile, z. B. $E_b J_i$ und $E_{b_s} J_{i_s}$ des Balkens und Pfostens eines Rahmens innerhalb des Spannungsbereichs, in dem wir unsere Eisenbetonbauten bemessen, in einem unabänderlichen festen Verhältnis stehen, das wir mit $J : J_s$ bewerten wollen. Hierbei bedeutet E_b und E_{b_s} die Elastizitätsziffer des Betons vom Balken und Pfosten, J_i und J_{i_s} das Trägheitsmoment des wirksamen Querschnitts dieser Teile. Obwohl alle diese Größen sich mit wachsender Beanspruchung und zunehmendem Alter ändern,[1]) ist doch, wie der im IV. Teil mitgeteilte Versuch zeigt, das Produkt $E_b J_i$ jeweils innerhalb gewisser Grenzen als ein bestimmter Festwert anzusehen. Ferner darf wohl stets bei beiden Teilen eines Bauwerks, dem Balken wie dem Pfosten, gleiches Alter angenommen, bei sparsamer und richtiger Bemessung aber auch annähernd gleiche Beanspruchung im Balken wie im Pfosten, also gleiche Werte für E_b und E_{b_s} vorausgesetzt werden, so daß in Anbetracht der in Fußnote auf S. 22 angegebenen sonstigen Annahmen, die zur Vereinfachung bei der Ermittlung des Trägheitsmoments eines Eisenbetonquerschnitts nötig sind, mit hinreichender Annäherung mit $J : J_s$ statt mit $E_b J_i : E_{b_s} J_{i_s}$ gerechnet werden kann.

Endlich ist die Voraussetzung gemacht, daß J und J_s mittlere Trägheitsmomente des Balkens wie des Pfostens sind. Aehnlich wie der einfache Balken in der Regel durch die sogenannten Vouten an den Trägerenden versteift wird, ist auch hier durch die Aus-

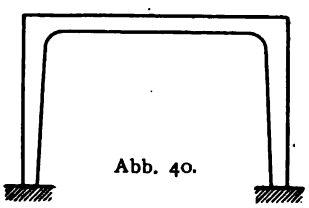


Abb. 40.

[1]) Beispielsweise wurde vom Verfasser bei der Auswertung der Messungsergebnisse gelegentlich der Bruchbelastung der Düsseldorfer Ausstellungsbrücke für fünf Jahre alten Beton $E = 550\,000$ kg/qcm gefunden, und zwar aus den Dehnungen am Bauwerk wie an den herausgeschnittenen Probewürfeln, während sonst immer mit $E = 140\,000$ kg/qcm gerechnet wird (vergl. die Versuchsergebnisse im IV. Teil).

rundung in den Rahmenecken meist eine Verstärkung der dort zusammenstoßenden Balken- und Pfostenenden vorhanden (Abb. 40), die jedoch hier vernachlässigt werden kann.

Die Bezeichnungen des Einspannungsgrades:

1. Im Falle senkrechter Belastung des Balkens ist, wie bereits oben angegeben, $\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}}$, wobei (vergl. Abb. 39 u. 41) M_A das an der Ecke A auftretende Biegungsmoment und $\mathfrak{M}_{max}$ das größte Biegungsmoment in dem Balken $A'B'$ unter der Annahme freier Stützung bedeuten. Besteht die Belastung aus einer Einzellast, so ist $\mathfrak{M}_{max}$ das Moment unter dieser Last (Abb. 41), bei gleichmäßig verteilter Belastung dagegen das Moment in der Balkenmitte $\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l^2}{8}$ (vergl. Abb. 18, S. 11).

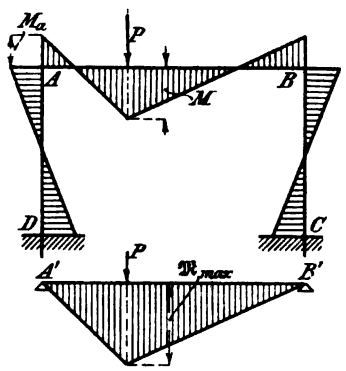


Abb. 41.

2. Im Falle wagerechter Belastung eines Pfostens (Abb. 42) wirkt der Gelenkrahmen und ebenso auch der fest eingespannte Rahmen wie ein Kragträger der aus zwei Pfosten CA und DB

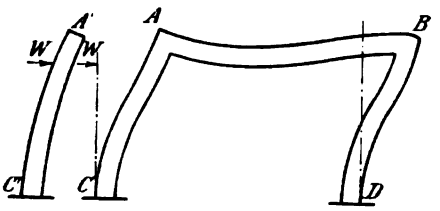


Abb. 42.

und einem ihre Enden verbindenden Stabe AB besteht. Es liegt daher nahe, wie im vorigen Falle den freigestützten Träger $A'B'$, hier den freien Kragarm $C'A'$, der ebenfalls statisch bestimmt ist, zum Vergleich heranzuziehen.

In beiden Fällen ergibt sich somit der statisch bestimmte Vergleichsträger durch Lösen der die freie Bewegung der Trägerenden hindernden Eckverbindung. Zu beachten ist jedoch, daß hier $\mathfrak{M}_K$ stets das Einspannungsmoment am Pfostenfuß, also an ein und derselben Stelle bei allen Belastungsarten bedeutet, dagegen dort $\mathfrak{M}_{max}$ jeweils im Lastpunkt der Einzellast oder der Mittelkraft der gleichmäßig verteilten Last, also an verschiedenen Stellen des Balkens $A'B'$ je nach der Lage der Last zu messen ist.

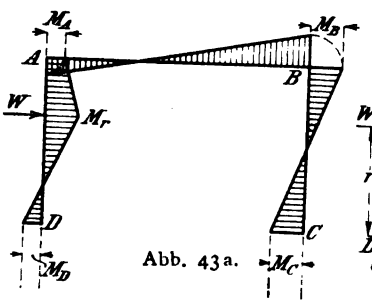


Abb. 43a.

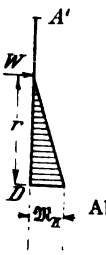


Abb. 43b.

Nach Abb. 43 ist nun

$$\left\{\begin{aligned} \mu_A &= \frac{M_A}{\mathfrak{M}_K} \\ \mu_B &= \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K} \\ \mu_C &= \frac{M_C}{\mathfrak{M}_K} \\ \mu_D &= \frac{M_D}{\mathfrak{M}_K}, \end{aligned}\right.$$

wobei wiederum M_A, M_B, . . . die Eckmomente, $\mathfrak{M}_K$ nach Abb. 43b das Einspannungsmoment des bei D eingespannten, sonst aber frei gedachten Kragarmes $D'A'$ bedeuten, der dadurch entsteht, daß die starre Eckverbindung bei A gelöst wird.

Der Wert $\mathfrak{M}_K$ ist je nach der Belastungsart des Pfostens nach Abb. 44a bis c mit einer wagerechten Last W

in beliebiger Höhe r zu . . . . $\mathfrak{M}_K = -W \cdot r$

oder im Punkte A' zu . . . . . $\mathfrak{M}_K = -W \cdot h$

oder bei gleichmäßig verteilter Last w zu . . $\mathfrak{M}_K = -\frac{w \cdot h^2}{2}$

einzusetzen.

Zu beachten ist ferner gegenüber dem positiven Moment $\mathfrak{M}_{max}$ des freigestützten Balkens das negative Vorzeichen des Einspannungsmoments $\mathfrak{M}_K$ am Fuß des Kragarms, wenn derselbe durch eine von außen her auf den Rahmen wirkende Kraft belastet ist.

Sind anstatt einer Einzellast P mehrere in verschiedenen Punkten wirkende Einzellasten P', P'', P''', . . . vorhanden, so ist das Verfahren einfach für jede Einzellast zu wiederholen. Das gesamte Eckmoment M_A ergibt sich dann als Summe der einzelnen Werte, also zu

$$M_A = \mu_A' \mathfrak{M}'_{max} + \mu_A'' \mathfrak{M}''_{max} + \mu_A''' \mathfrak{M}'''_{max} + \ldots$$

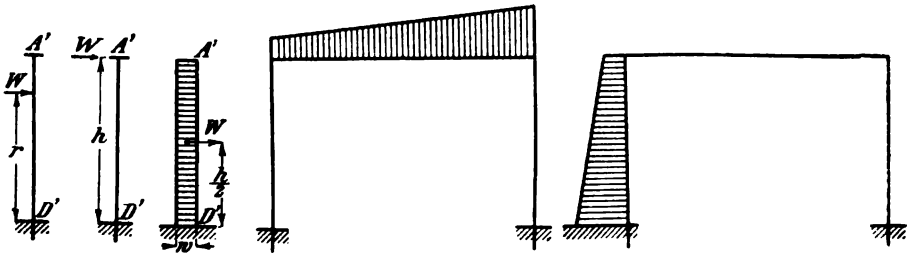


Abb. 44a bis 44c.

Abb. 45a.

Abb. 45b.

Nach demselben Grundsatz lassen sich auch weitere Formeln für beliebig andere Belastungsarten, z. B. trapezförmige Belastung des Balkens oder Pfostens (Abb. 45a u. 45b), durch Integration aus dem Fall der Einzellast herleiten, wie später an dem Beispiel der gleichmäßig verteilten und dreieckförmigen Last gezeigt wird.

Die dreieckförmige Belastungsfläche tritt z. B. bei den durch Erddruck oder Wasserdruck belasteten Pfosten von Rahmenbrücken und Durchlässen auf.[1])

Bei dem einfach statisch unbestimmten Rahmen mit Fußgelenken und wagerechter Belastung z. B. (vergl. S. 34) wird die statisch unbestimmbare Größe μ_A mittels der allgemeinen Arbeitsgleichung nach Castigliano bestimmt. Die Ermittlung von μ_B ist dann unter Verwendung rein statischer Gleichungen möglich. Beim Rahmen mit fester Fußeinspannung sowie beim vierseitigen Rahmen sind die Einspannungsgrade an drei Ecken,

[1]) Vergl. die für diese Fälle abgeleiteten Formeln für den dreiseitigen Gelenkrahmen, Gehler, Handbuch für Eisenbetonbau, 2. Aufl., Band VI. Balkenbrücken, S. 234.

z. B. μ_A, μ_B und μ_C, mittels Elastizitätsgleichungen und zwar am raschesten nach dem vereinfachten Verfahren von Müller-Breslau (vergl. Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 3. Auflage, S. 119 ff.) zu berechnen. Der vierte Einspannungsgrad μ_D läßt sich aus rein statischen Gleichungen bestimmen.

Die vorliegende Betrachtung wurde auf symmetrisch gestaltete Rahmen beschränkt, da unsymmetrische Rahmen, z. B. mit ungleich hohen Pfosten, nur äußerst selten vorkommen.[1])

Als Bezeichnungen sind angewendet:

J = Trägheitsmoment des Balkens beim dreiseitigen Rahmen,
J_o = „ „ oberen Balkens beim vierseitigen Rahmen,
J_u = „ „ unteren „ „ „ „
J_s = „ eines Pfostens,
$\frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} = \nu$, die Veränderliche, welche in der allgemeinen Ableitung des dreiseitigen Rahmens einzig vorkommt und nur von den Rahmenabmessungen abhängig ist,
$\frac{J_o}{J_u} = \omega$, die zweite Veränderliche, die beim vierseitigen Rahmen noch hinzutritt,
P = senkrechte Einzellast,
W = wagerechte „
p = senkrechte gleichmäßig verteilte Last (auf die Längeneinheit bezogen),
w = wagerechte gleichmäßig verteilte Last (auf die Längeneinheit bezogen).

Die Biegungsmomente werden als positiv bezeichnet, wenn sie an der Innenseite des Rahmens Zug erzeugen, dagegen negativ, wenn sie an der Innenseite Druck hervorrufen.

Im folgenden soll der dreiseitige Rahmen mit Fußgelenken kurz als Gelenkrahmen, der dreiseitige Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen als eingespannter Rahmen bezeichnet werden.

C. Der dreiseitige Gelenkrahmen.

Wirken auf den Gelenkrahmen beliebige lotrechte oder wagerechte Kräfte, so entstehen außer den lotrechten Stützendrücken in den Gelenkpunkten C und D noch wagerechte Stützkräfte X. Während die lotrechten Stützendrücke genau wie beim einfachen Balken durch Projektions- oder Momentengleichungen, also mit den einfachen Mitteln der Statik, ohne weiteres bestimmt werden können, wird der Rahmenschub X in der Regel als statisch unbestimmbare Größe eingeführt. Für lotrechte Belastungen empfiehlt es sich stets, als statisch bestimmtes Hauptnetz den einfachen Balken anzunehmen, dessen eine Stütze ein Gelenklager und dessen andere Stütze ein Rollenlager bildet, für wagerechte Belastungen dagegen den senkrecht stehenden Kragträger, dessen unteres Ende eingespannt ist.

[1]) Die Beschreibung eines dieser seltenen Fälle siehe Gehler, Neuere Ausführungen von Balkenbrücken in Eisenbeton, Armierter Beton 1912.

I. Senkrechte Belastung des Balkens.

Während die lotrechten Stützendrücke A und B (s. Abb. 46) in den beiden Pfosten nur Längskräfte erzeugen, wird durch den wagerechten Rahmenschub X in einem Pfostenschnitt in der Höhe x das Biegungsmoment $M_x = -X \cdot x$ hervorgerufen, also in den Rahmenecken A und B die Eckmomente

$$M_A = -X \cdot h \quad \text{und} \quad M_B = -X \cdot h.$$

Da der Rahmenschub X an beiden Pfostenfüßen gleich sein muß, ergibt sich daher hier bemerkenswerterweise, daß auch bei unsymmetrischer Belastung des Balkens AB beide Eckmomente M_A und M_B stets gleich groß sind.

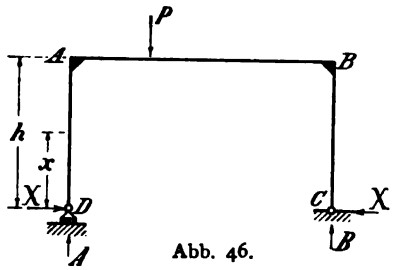


Abb. 46.

1. Senkrechte Einzellast in beliebiger Lage. Für eine auf den Balken AB in beliebiger Stellung wirkende lotrechte Einzellast ist nach MüllerBreslau[1]) mit den Bezeichnungen der Abb. 47a der Rahmenschub

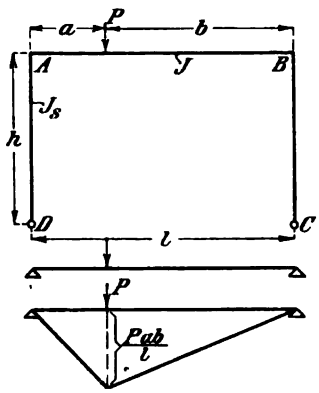


Abb. 47a bis 47c.

$$X = \frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot h \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_s} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J}{F} \cdot \frac{1}{h^2}\right)}.$$

Wird hierin $\frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} = \nu$ gesetzt, ferner $\frac{J}{F} = i^2$, so lautet die Gleichung

$$X = \frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot h \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \nu + \frac{i^2}{h^2}\right)}.$$

Das letzte Glied in der Klammer des Nenners rührt von dem Einfluß der Längskräfte her und hängt nur von dem Verhältnis des Trägheitshalbmessers $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ des Balkenquerschnitts zur Pfostenhöhe h ab; es kann daher gegen die beiden ersten Glieder der Klammer in der Regel

[1]) Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1904, III. Auflage, Seite 115.

ohne weiteres vernachlässigt werden. Man erhält dann mit fast vollkommener Genauigkeit

$$X = \frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot h \cdot l \left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)},$$

und daraus

$$M_A = M_B = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot l \left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)}.$$

Da das größte Biegungsmoment des frei gestützten Balkens $A'B'$, das bekanntlich unter der Last P auftritt, $\mathfrak{M}_{max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$ ist, wird

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}} = \mu_B = \frac{M_B}{\mathfrak{M}_{max}} = -\frac{1}{2\left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)} = -\frac{3}{2(3 + 2\nu)}$$

oder

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{3}{2\alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wenn der Klammerausdruck des Nenners mit

$$\alpha_1 = 3 + 2\nu$$

bezeichnet wird. Dieser Wert tritt, wie ein Blick auf die Zusammenstellung am Schlusse zeigt, als einziges Glied im Nenner auf und ist nur mit verschiedenen Zahlenbeiwerten behaftet. Er möge daher als das Nennerglied des dreiseitigen Gelenkrahmens bezeichnet werden.

Bemerkenswert ist, daß nach Formel 1) der Einspannungsgrad μ_A und μ_B, also das Verhältnis der Eckmomente zu dem Biegungsmoment des gleich weit gespannten einfachen Balkens unter der Last P, nicht nur von der Größe der Last, sondern auch von der Stellung derselben unabhängig ist.

2. Senkrechte Einzellast in Balkenmitte. Der vorher ermittelte allgemeine Ausdruck I gilt auch für diesen Sonderfall, für den also ebenfalls

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{3}{2\alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

ist.

In beiden Fällen 1) und 2) ergibt sich sodann das Eckmoment

$$M_A = M_B = \mu_{A,B} \cdot \frac{P \cdot a \cdot b}{l},$$

wobei für Fall 2) $a = b = \frac{l}{2}$ ist und daher hier

$$M_A = M_B = \mu_{A,B} \cdot \frac{P \cdot l}{4}.$$

3. Mehrere senkrechte Einzellasten. Für mehrere Einzellasten P', P'', . . . von verschiedener Größe und beliebiger Stellung (Abb. 48) ist

$$M_A' = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_{max}' = -\frac{3}{2\alpha_1} \cdot \frac{P' a' b'}{l}$$

$$M_A'' = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_{max}'' = -\frac{3}{2\alpha_1} \cdot \frac{P'' a'' b''}{l}$$

. . . . . .

$$M_A = M_A' + M_A'' + \ldots = -\frac{3}{2\alpha_1} \cdot \frac{1}{l} \cdot \Sigma (P \cdot ab) \quad . \quad 1a)$$

Die Gleichung 1a) gilt also auch für eine Summe von verschieden großen Einzellasten in beliebiger Stellung, also z. B. für einen über den Träger rollenden Lastenzug, wobei

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{\Sigma P a b}{l} = \frac{P' \cdot a' \cdot b' + P'' \cdot a'' \cdot b'' + \ldots}{l} \text{ ist.}$$

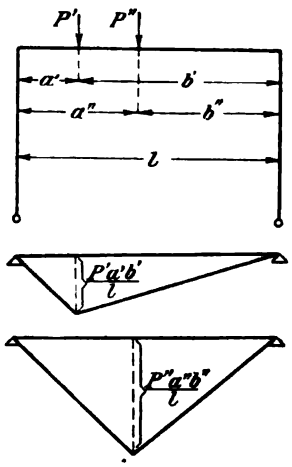


Abb. 48.

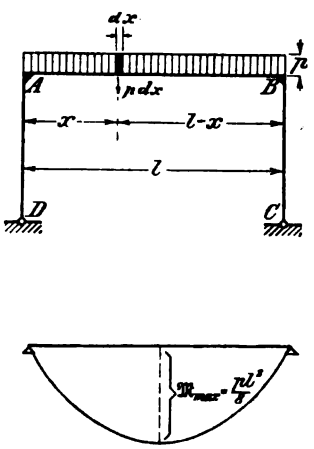


Abb. 49a und 49b.

4. Für gleichmäßig verteilte Last sind in Gleichung 1a) $P = p \cdot dx$ und die Abstände $a = x$ und $b = l - x$ zu setzen (vergl. Abb. 49). Durch Integration ergibt sich dann für die Gesamtwirkung

$$M_A = -\frac{3}{2\alpha_1} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l p \cdot x (l - x) \cdot dx,$$

also

$$M_A = -\frac{p l^2}{12 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)} = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_{max}.$$

Hierin ist $\mathfrak{M}_{max} = \frac{p l^2}{8}$ das größte Biegungsmoment für den gleich belasteten, aber frei gestützten Balken, somit wird

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{1}{1{,}5 + \nu} = -\frac{2}{\alpha_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

II. Wagerechte Belastung eines Pfostens.

5. Einzellast in beliebiger Lage. Nach Abb. 50 ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für das statisch bestimmte Hauptnetz, und zwar:

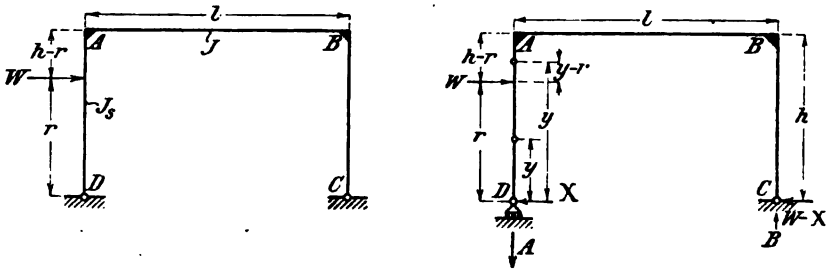


Abb. 50a und 50b.

1. durch die Projektion auf die Wagerechte:
$$W - X - (W - X) = 0;$$
2. durch die Projektion auf die Senkrechte:
$$A + B = 0 \text{ oder } A = -B;$$
3. als Momentensumme für den Punkt C:
$$W.r - A.l + X.0 = 0 \text{ oder } A = \frac{W.r}{l}.$$

Die Arbeitsgleichung zur Bestimmung statisch nicht bestimmbarer Größen lautet:

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \cdot ds = 0.$$

Für den Stab $\overline{DA}$ ist
im unteren Teil:

$$M = + X.y \text{ also } \frac{\partial M}{\partial X} = + y;$$

im oberen Teil:

$$M = + Xy - W(y - r), \text{ also } \frac{\partial M}{\partial X} = + y.$$

Somit lautet das von Stab $\overline{DA}$ herrührende Glied der Arbeitsgleichung

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{EJ_s} \cdot \left\{ \int_0^r Xy \,.\, y \,.\, dy + \int_r^h [Xy - W.(y - r)]\, y\, dy \right\}$$
$$= \frac{1}{EJ_s} \cdot \left[\frac{Xh^3}{3} - \frac{W}{3}(h^3 - r^3) + \frac{Wr}{2}(h^2 - r^2) \right].$$

Für den Stab $\overline{AB}$ ist:

$$M = + Xh - W.(h - r) - Ax, \text{ also } \frac{\partial M}{\partial X} = + h,$$

folglich:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{EJ} \cdot \int_0^l [Xh - W(h - r) - Ax] \,.\, h \,.\, dx$$
$$= \frac{1}{EJ} \left(Xh^2 l - W.h^2 l + \frac{W}{2} \cdot rhl \right).$$

Für den Stab $\overline{BC}$ ist:

$$M = -(W - X) \cdot y, \text{ also } \frac{\partial M}{\partial X} = +y.$$

folglich:

$$\mathfrak{A}_3 = \frac{1}{E J_s} \cdot \int_0^h (X - W) \cdot y \cdot y \cdot dy$$

$$= \frac{1}{E J_s} \cdot (X - W) \frac{h^3}{3}.$$

Die Arbeitsgleichung für den ganzen Rahmen $DABC$ setzt sich nun aus diesen drei Summanden zusammen:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$X = \frac{W \cdot \left\{ \frac{J}{J_s} \left[\frac{2h^3 - r^3}{3} - \frac{r(h^2 - r^2)}{2} \right] + \left(h^2 l - \frac{r h \cdot l}{2} \right) \right\}}{h^2 l + \frac{2}{3} \frac{J}{J_s} \cdot h^3}.$$

Setzt man hierin $\frac{J}{J_s} \cdot \frac{h}{l} = \nu$ und $\frac{r}{h} = \eta$, so erhält man

$$X = \frac{W}{2} \cdot \frac{\nu(\eta^3 - 3\eta + 4) + 3(2 - \eta)}{3 + 2\nu}.$$

Das Eckmoment M_A an der Rahmenecke A ist nach Abb. 50b

$$M_A = +Xh - W(h - r)$$

oder mit $\frac{r}{h} = \eta$:

$$M_A = +Xh - W \cdot h(1 - \eta).$$

Setzt man den für X berechneten Wert ein, so wird:

$$M_A = +\frac{W \cdot r}{2} \cdot \frac{3 + \nu(1 + \eta^2)}{3 + 2\nu} \quad \ldots \quad 4')$$

Das Einspannungsmoment des zum Vergleich dienenden freien Kragträgers (vergl. S. 27) ist:

$$\mathfrak{M}_K = -W \cdot r,$$

folglich:

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_K} = -\frac{3 + \nu(1 + \eta^2)}{2(3 + 2\nu)} = -\frac{3 + \nu(1 + \eta^2)}{2\alpha_1} \quad . \quad 4a)$$

wenn wiederum das Nennerglied des dreiseitigen Gelenkrahmens $\alpha_1 = 3 + 2\nu$ eingeführt wird.

In gleicher Weise ergibt sich für die Rahmenecke B das Eckmoment

$$M_B = -(W - X)h.$$

Durch Einsetzen des Wertes für X erhält man hier:

$$M_B = -\frac{W \cdot r}{2} \cdot \frac{3 + \nu(3 - \eta^2)}{(3 + 2\nu)} \quad \ldots \quad 4'')$$

und daher:

$$\mu_B = \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K} = +\frac{3 + \nu(3 - \eta^2)}{2(3 + 2\nu)} = +\frac{3 + \nu(3 - \eta^2)}{2\alpha_1} \quad . \quad 4b)$$

6. Wagerechte Einzellast in der oberen Rahmenecke (Abb. 51). Setzt man in Formel 4a) und 4b) $r = h$ und daher $\eta = 1$, so ergibt sich:

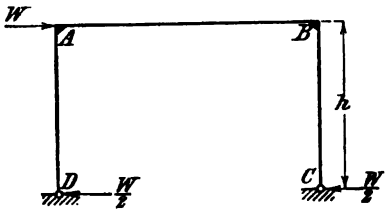


Abb. 51.

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_K} = -\frac{1}{2} \quad . \quad . \quad 5a)$$

und

$$\mu_B = \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K} = +\frac{1}{2} \quad . \quad . \quad 5b)$$

Da hier das Einspannungsmoment des freien Kragträgers

$$\mathfrak{M}_K = -W \cdot h$$

ist, so erhält man als Eckmomente

$$M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_K = +\frac{Wh}{2}$$

und

$$M_B = \mu_B \cdot \mathfrak{M}_K = -\frac{Wh}{2}.$$

Daraus folgt, daß die wagrechten Schübe des Rahmens bei D und C für diesen einfachen Belastungsfall gleich groß sind und sich aus $-Xh = -W \cdot \frac{h}{2}$ zu $X = \frac{W}{2}$ ergeben. Da somit der statisch unbestimmte Rahmenschub bemerkenswerterweise von den Abmessungen des Rahmens nicht abhängt, sondern in einfacher Weise sich als die Hälfte der wagrechten Kraft W ergibt, ist auch der Einspannungsgrad eine von den Rahmenabmessungen unabhängige Größe, also ein Festwert. Dieser besondere, einfache Belastungsfall bildet durch diese Eigenheit, wie die Zusammenstellung am Schlusse zeigt, eine bemerkenswerte Ausnahme von allen übrigen Fällen, in denen stets die Bemessungsgröße $\nu = \frac{J}{J_s} \cdot \frac{h}{l}$ auftritt.

7. Wagerechte, gleichmäßig verteilte Belastung. Setzt man nach Abb. 52:

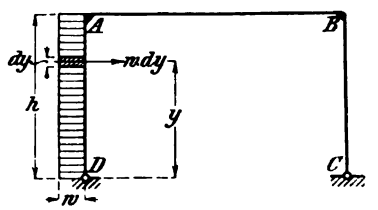


Abb. 52.

$$W = w \cdot dy$$

und entsprechend:

$$\eta = \frac{r}{h} = \frac{y}{h},$$

also

$$d\eta = \frac{dy}{h} \quad \text{und} \quad dy = h\,d\eta,$$

so wird

$$W = w \cdot dy = w \cdot h \cdot d\eta.$$

Führt man diesen Wert für W und ferner $r = h \cdot \eta$ in Formel 4' (S. 33) ein, so ergibt sich:

$$M_A = \int_0^1 \frac{wh \cdot h\eta}{2} \cdot \frac{3 + \nu(1 + \eta^2)}{3 + 2\nu} \cdot d\eta$$

oder

$$M_A = + \frac{w h^2}{2 (3 + 2 \nu)} \int_0^1 \eta [3 + \nu (1 + \eta^2)] \cdot d\eta,$$

folglich

$$M_A = + \frac{w h^2}{8} \cdot \frac{6 + 3 \nu}{3 + 2 \nu} \quad \ldots \ldots \quad 6')$$

Da hier das Einspannungsmoment des freien Kragträgers

$$\mathfrak{M}_K = - w h \cdot \frac{h}{2} = - \frac{w h^2}{2}$$

ist, so erhält man

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_K} = - \frac{6 + 3 \nu}{4 (3 + 2 \nu)} = - \frac{6 + 3 \nu}{4 \alpha_1} \quad \ldots \quad 6a)$$

wobei wiederum $\alpha_1 = 3 + 2 \nu$ das Nennerglied des dreiseitigen Rahmens bedeutet.

In gleicher Weise ergibt sich durch Einsetzen von $W = w h \,.\, d\eta$ und $r = h \eta$ in Formel 4'' (S. 33)

$$M_B = - \frac{w h^2}{2 (3 + 2 \nu)} \int_0^1 \eta [3 + \nu (3 - \eta^2)] \,.\, d\eta,$$

folglich

$$M_B = - \frac{w \,.\, h^2}{8} \frac{6 + 5 \nu}{3 + 2 \nu} \quad \ldots \ldots \quad 6'')$$

und für

$$\mathfrak{M}_K = - \frac{w \,.\, h^2}{2}$$

$$\mu_B = \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K} = + \frac{6 + 5 \nu}{4 (3 + 2 \nu)} = + \frac{6 + 5 \nu}{4 \alpha_1} \quad \ldots \quad 6b)$$

8. Wagerechte dreieckförmige Belastung. Verteilt sich die Belastung des Pfostens, wie beim Wasserdruck und Erddruck, in der Form eines Dreiecks mit der Grundlinie m und der Höhe h, so ist

$$W = \frac{m \,.\, h}{2} \quad \text{oder} \quad m = \frac{2 W}{h}$$

oder nach Abb. 53

$$\frac{w}{m} = \frac{h - y}{h} \quad \text{oder} \quad w = \frac{h - y}{h} \cdot m,$$

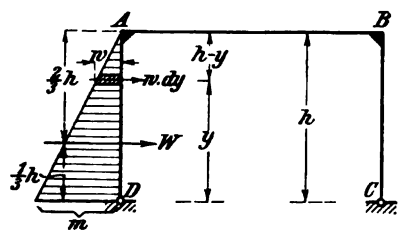


Abb. 53.

folglich

$$w = \frac{2 W}{h^2} (h - y).$$

Da für jedes Belastungselement $w \,.\, dy$ die Gleichung

$$d M_A = \mu_A \,.\, d \mathfrak{M}_K$$

gilt, so ist für die gesamte Dreieckbelastung

$$M_A = \int d M_A = \int \mu_A \,.\, d \mathfrak{M}_K.$$

Nun ist das Einspannungsmoment des freien Kragträgers

$$d\mathfrak{M}_K = -w \cdot dy \cdot y = -\frac{2W}{h^2} \cdot (h-y)\, y \cdot dy$$

oder mit $\eta = \frac{y}{h}$ und $dy = h \cdot d\eta$

$$d\mathfrak{M}_K = -\frac{2W}{h^2} \cdot (h - h \cdot \eta) \cdot h\eta \cdot h \cdot d\eta = -2W \cdot h\,(1-\eta)\,\eta \cdot d\eta,$$

folglich wird

$$M_A = -2W \cdot h \int_0^1 \mu_A\,(1-\eta)\,\eta \cdot d\eta.$$

Da aber nach Formel 4a (S. 33) $\mu_A = -\frac{3+\nu+\nu \cdot \eta^2}{2(3+2\nu)}$ ist, erhält man

$$M_A = +\frac{W \cdot h}{3+2\nu} \int_0^1 (3+\nu+\nu \cdot \eta^2)\,(1-\eta)\,\eta \cdot d\eta$$

oder

$$M_A = +\frac{W \cdot h\,(30+13\nu)}{60\,(3+2\nu)} \quad \ldots\ldots\ 7')$$

Da hier das Einspannungsmoment des freien Kragträgers

$$\mathfrak{M}_K = -\frac{W \cdot h}{3}$$

ist, so wird

$$\mu_A = -\frac{30+13\nu}{20\,(3+2\nu)} = -\frac{30+13\nu}{20\,\alpha_1} \quad \ldots\ 7a)$$

In gleicher Weise erhält man, da nach Formel 4b (S. 33) $\mu_B = \frac{3+3\nu-\nu \cdot \eta^2}{2(3+2\nu)}$ ist,

$$M_B = -\frac{W \cdot h}{3+2\nu} \int_0^1 (3+3\nu-\nu \cdot \eta^2)\,(1-\eta)\,\eta \cdot d\eta$$

oder

$$M_B = -\frac{W \cdot h\,(10+9\nu)}{20\,(3+2\nu)} \quad \ldots\ldots\ 7'')$$

folglich wird für

$$\mathfrak{M}_K = -\frac{W \cdot h}{3}$$

$$\mu_B = +\frac{3\,(10+9\nu)}{20\,(3+2\nu)} = +\frac{30+27\nu}{20\,\alpha_1} \quad \ldots\ 7b$$

D. Der dreiseitige eingespannte Rahmen.

I. Senkrechte Belastung des Balkens.

1. Senkrechte Einzellast in beliebiger Lage. Für diesen Fall (Abb. 54a) ist nach Müller-Breslau, a. a. O, S. 125, zu setzen:

$$\begin{cases} X = \dfrac{3\,F_o}{h\,(2\,l + h')} \\ Y = \dfrac{F_o \cdot e}{T_y} \\ Z = \dfrac{F_o}{l + 2\,h'}. \end{cases}$$

Hierin bedeutet nach Abb. 54b:

F_o = die Momentenfläche für den auf zwei Stützen A' und B' frei aufliegenden Balken, also

$$F_o = \mathfrak{M}_m \cdot \frac{l}{2}$$

e = den Abstand ihres Schwerpunktes S von der Symmetrieachse $m-m$, also für eine Einzellast P im Abstande a von der linken Stütze

$$e = \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2} - a\right) = \frac{l - 2\,a}{6}$$

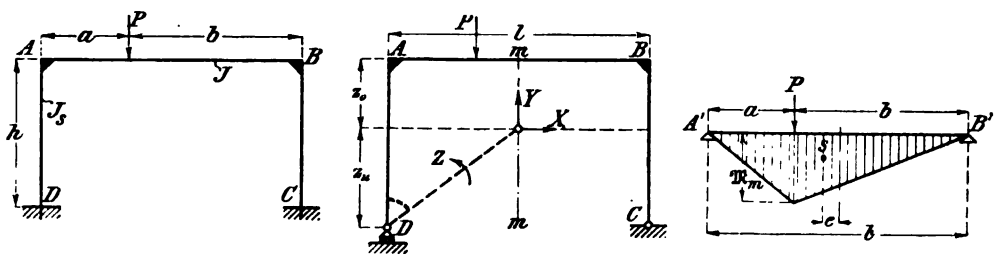


Abb. 54a bis 54c.

T_y = das Trägheitsmoment des Rahmens in bezug auf die Achse $m-m$, also

$$T_y = \frac{l^3}{12} + 2\,h' \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{12}(l + 6\,h').$$

Ferner ist zu setzen

$$h' = \frac{J}{J_s} \cdot h$$

$$z_o = \frac{h \cdot h'}{l + 2\,h'}$$

$$z_u = \frac{h' \cdot (l + h')}{l + 2\,h'}.$$

Führt man in diese Gleichungen noch die Bezeichnungen

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{a}{l}$$

ein, so wird

$$e = \frac{l}{6}(1 - 2\xi) \quad \text{und} \quad T_y = \frac{l^3}{12}(1 + 6\,\nu).$$

und damit

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{3F_o}{h(2l+h')} = \frac{3\mathfrak{M}_m \cdot \frac{l}{2}}{h(2l+h')} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathfrak{M}_m}{h}\cdot\frac{1}{2+\nu} \\ Y &= \frac{F_o \cdot e}{T_y} = \frac{\mathfrak{M}_m \cdot \frac{l}{2}\cdot\frac{l}{6}\cdot(1-2\xi)}{\frac{l^3}{12}\cdot(1+6\nu)} = \frac{\mathfrak{M}_m}{l}\cdot\frac{1-2\xi}{1+6\nu} \\ Z &= \frac{F_o}{l+2h'} = \frac{\mathfrak{M}_m\cdot\frac{l}{2}}{l+2h'} = \frac{\mathfrak{M}_m}{2}\cdot\frac{1}{1+2\nu} \end{aligned}\right\}$$

Ferner

$$z_o = h\cdot\frac{\nu}{1+2\nu} \quad \text{und} \quad z_u = h\cdot\frac{1+\nu}{1+2\nu}.$$

Nun ist nach Abb. 54b

$$\begin{aligned} M_A &= -X\,.\,z_o - Z - Y\cdot\frac{l}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathfrak{M}_m}{h}\cdot\frac{1}{2+\nu}\cdot h\cdot\frac{\nu}{1+2\nu} - \frac{\mathfrak{M}_m}{2}\cdot\frac{1}{1+2\nu} - \frac{\mathfrak{M}_m}{l}\cdot\frac{1-2\xi}{1+6\nu}\cdot\frac{l}{2} \\ &= -\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\left[\frac{3\nu}{(2+\nu)(1+2\nu)} + \frac{1}{1+2\nu} + \frac{1-2\xi}{1+6\nu}\right] \\ &= -\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\left[\frac{2}{2+\nu} + \frac{1-2\xi}{1+6\nu}\right], \end{aligned}$$

also

$$\mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_m} = -\frac{1}{2+\nu} - \left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{1+6\nu} \quad \ldots \quad 8a)$$

Wie ein Blick auf die Zusammenstellung am Schlusse zeigt, treten beim eingespannten Rahmen in sämtlichen Ausdrücken für μ nur die beiden Nennerglieder $(2+\nu)$ und $(1+6\nu)$ auf, die wir mit α_2 und β_2 bezeichnen wollen. Aus den soeben zur Herleitung von μ verwendeten Ausdrücken für X Y und Z sieht man, daß das Nennerglied

$$\alpha_2 = 2+\nu$$

von der wagrechten Seitenkraft des Kämpferschubes und das Glied

$$\beta_2 = 1+6\nu$$

von der senkrechten Seitenkraft desselben herrührt, dagegen ist bemerkenswerterweise das Nennerglied des statisch unbestimmbaren Momentes Z aus der Rechnung herausgefallen.

Da $F_o = \frac{\mathfrak{M}_m \cdot l}{2}$ in den Gleichungen für X, Y und Z den Inhalt der Momentenfläche bedeutet und ν, α_2 und β_2 nur von den geometrischen Abmessungen des Rahmens abhängen, kommt somit die Unsymmetrie

der Laststellung nur bei der senkrechten, statisch unbestimmbaren Kraft Y in dem Verhältnis $\frac{a}{l}=\xi$ zum Ausdruck. Die Gleichung 8a) läßt sich somit in der Form schreiben:

$$\mu_A=-\frac{1}{\alpha_2}-\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{\beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

Nach Abb. 54b ist ferner

$$M_B=-X\,.\,z_o-Z+Y\cdot\frac{l}{2}\,.$$

folglich wird ähnlich wie bei M_A hier

$$M_B=-\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\cdot\left[\frac{2}{2+\nu}-(1-2\xi)\frac{1}{1+6\nu}\right]$$

und somit

$$\mu_B=-\frac{1}{2+\nu}+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{1+6\nu}$$

oder

$$\mu_B=-\frac{1}{\alpha_2}+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{\beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8b)$$

Ferner ist nach Abb. 54b

$$M_D=+X\,.\,z_u-Z-Y\cdot\frac{l}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathfrak{M}_m}{h}\cdot\frac{1}{2+\nu}\cdot h\cdot\frac{1+\nu}{1+2\nu}-\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\cdot\frac{1}{1+2\nu}-\frac{\mathfrak{M}_m}{l}\cdot\frac{1-2\xi}{1+6\nu}\cdot\frac{l}{2}$$

$$=\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\left[\frac{3(1+\nu)}{(2+\nu)(1+2\nu)}-\frac{1}{1+2\nu}-\frac{1-2\xi}{1+6\nu}\right]$$

$$=\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\left[\frac{1}{2+\nu}-(1-2\xi)\frac{1}{1+6\nu}\right],$$

folglich

$$\mu_D=\frac{M_D}{\mathfrak{M}_m}=+\frac{1}{2(2+\nu)}-\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{1+6\nu}$$

oder

$$\mu_D=+\frac{1}{2\alpha_2}-\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{\beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8d)$$

Endlich ist nach Abb. 54b

$$M_C=+X\,.\,z_u-Z+Y\cdot\frac{l}{2}$$

$$=\frac{\mathfrak{M}_m}{2}\left[\frac{1}{2+\nu}+(1-2\xi)\frac{1}{1+6\nu}\right],$$

folglich

$$\mu_C=+\frac{1}{2(2+\nu)}+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{1+6\nu}$$

oder

$$\mu_C=+\frac{1}{2\alpha_2}+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\frac{1}{\beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8c)$$

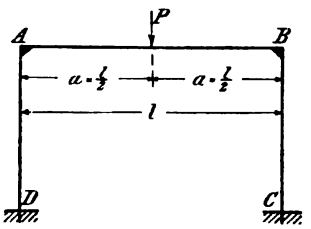


Abb. 55.

2. Einzellast in Balkenmitte. Für diesen Sonderfall (Abb. 55) wird

$$a = b = \frac{l}{2},$$

also $\xi = \frac{1}{2}$, demnach wird

Gleichung 8a) = 8b)

ebenso auch Gleichung 8c) = 8d)

$$\left.\begin{aligned} \mu_A = \mu_B &= -\frac{1}{\alpha_2} \quad \cdots \\ \mu_C = \mu_D &= +\frac{1}{2\,\alpha_2} \quad \cdots \end{aligned}\right\} 9)$$

hierbei ist $\mathfrak{M}_m = \frac{P \cdot l}{4}$.

Es ist somit $\mu_{C,D} = -\frac{1}{2}\,\mu_{A,B}$.

Da bei symmetrischer Belastung nach Abb. 55 der Abstand e des Schwerpunktes der Momentenfläche von der Symmetrieachse $m-m$ gleich Null ist, wird auch $Y = 0$. Daher verschwindet in den Formeln für μ die zu Y gehörige Nennergröße $\beta_2 = 1 + 6\nu$.

3. Senkrechte, gleichmäßig verteilte Belastung. Nach Abb. 56 ist für jedes Belastungselement die Last $dP = p \cdot dx$ und der Abstand $a = x$ bezw. $b = l - x$.

Bezeichnet man, wie früher,

$$\frac{a}{l} = \frac{x}{l} = \xi; \qquad \frac{b}{l} = \frac{l-x}{l} = 1 - \xi,$$

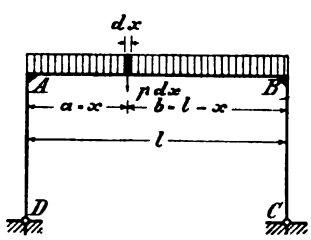


Abb. 56.

so ist

$$d\xi = \frac{1}{l} \cdot da,$$

also

$$da = dx = l \cdot d\xi,$$

folglich ist

$$dP = p \cdot dx = p \cdot l \cdot d\xi,$$

somit nach Gleichung 8a), da

$$M_A = \int_A^B \mu_A \cdot \frac{dP \cdot a \cdot b}{l} = \int_0^1 \mu_A \cdot \frac{p \cdot l \cdot d\xi}{l}\, l \cdot \xi \cdot l\,(1-\xi)$$

$$= \int_0^1 \mu_A \cdot p \cdot l^2 \xi\,(1-\xi)\,d\xi$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\alpha_2} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\frac{1}{\beta_2}\right] \cdot p l^2 \xi \cdot (1-\xi)\,d\xi$$

$$= -p \cdot l^2 \int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)\right] \xi\,(1-\xi)\,d\xi$$

$$= -p \cdot l^2 \left[\frac{1}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3}\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^3}{2} + \frac{\xi^4}{4}\right)\right]$$

$$= -p \cdot l^2 \left(\frac{1}{6 \cdot \alpha_2} + \frac{0}{\beta_2}\right) = -\frac{p \cdot l^2}{6 \cdot \alpha_2}.$$

Da hier $\mathfrak{M}_{\max} = \frac{p \cdot l^2}{8}$

ist, so wird $\mu_A = \mu_B = \frac{M_{A,B}}{\mathfrak{M}_{\max}} = -\frac{4}{3\,\alpha_2}$ . . . 10a, b)

In gleicher Weise ergibt sich nach Gleichung 8d)

$$M_D = \int_0^1 \left[\frac{1}{2\,\alpha_2} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\frac{1}{\beta_2}\right] p \cdot l^2 \xi \cdot (1-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{p \cdot l^2}{12\,\alpha_2},$$

folglich $\mu_C = \mu_D = \frac{M_{C,D}}{\mathfrak{M}_{\max}} = +\frac{2}{3\,\alpha_2}$ . . . 10c, d)

Es ist wiederum $\mu_{C,D} = -\frac{1}{2}\mu_{A,B}$.

Auch hier ist, wie im Falle der Einzellast in Balkenmitte, infolge der Symmetrie $e = 0$, $Y = 0$, so daß im Ausdruck für μ der Nennerwert $\beta_2 = 1 + 6\nu$ weggefallen ist.

II. Wagerechte Belastung eines Pfostens.

4. Einzellast in beliebiger Lage. Das statisch bestimmte Hauptnetz der Abb. 57a entsteht dadurch, daß die starre Verbindung im Punkte C

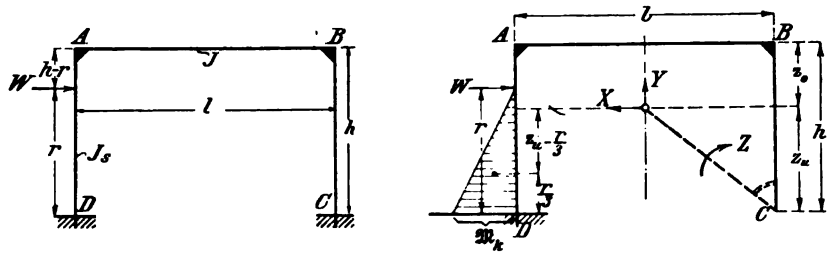


Abb. 57a und 57b.

gelöst wird, der Rahmen also wie ein bei D eingespannter Kragträger wirkt. Das Einspannungsmoment dieses freien Kragträgers ist somit

$$\mathfrak{M}_K = -W \cdot r.$$

Die Abstände z_o und z_u des elastischen Schwerpunktes sind wie vorher

$$z_o = h \cdot \frac{\nu}{1+2\nu}$$

$$z_u = h \cdot \frac{1+\nu}{1+2\nu},$$

wobei

$$\nu = \frac{h}{l}\frac{J}{J_s} = \frac{h'}{l} \text{ ist.}$$

Das Trägheitsmoment T_y des Rahmens in bezug auf die Symmetrieachse ist ebenso wie früher

$$T_y = \frac{l^3}{12}(1+6\nu),$$

ferner das Trägheitsmoment T_x in bezug auf die Wagrechte durch den elastischen Schwerpunkt

$$\begin{aligned} T_x &= l \cdot z_o^2 + 2h' \cdot \left(\frac{h}{2} - z_o\right)^2 + 2\frac{h' \cdot h^2}{12} \\ &= (l+2h') \cdot z_o^2 - 2hh' z_o + \frac{h'h^2}{2} + \frac{h'h^2}{6} \\ &= l(1+2\nu)\frac{h^2\nu^2}{(1+2\nu)^2} - 2l\nu h \cdot \frac{h\cdot\nu}{1+2\nu} + \frac{2}{3}l\cdot\nu\cdot h^2 \\ &= \frac{l\cdot h^2}{3}\cdot\frac{\nu\cdot(2+\nu)}{1+2\nu}. \end{aligned}$$

Endlich ist das elastische Gewicht des Rahmens

$$G = l + 2h' = l(1+2\nu).$$

Die Momentenfläche F_o für den statisch bestimmten einfachen Kragträger ist nach Abb. 57b

$$F_o = \int M_o \cdot ds' = \frac{J}{J_s}\cdot\frac{\mathfrak{M}_K \cdot r}{2} = -\frac{J}{J_s}\cdot\frac{W\cdot r^2}{2},$$

oder für $\frac{r}{h} = \eta$, also $r = \eta \cdot h$ und $\frac{J}{J_s}\cdot h = h' = l\cdot\nu$

$$F_o = -\frac{J}{J_s}\frac{W}{2}\cdot h^2\cdot\eta^2 = -\frac{1}{2}W\cdot h\cdot l\cdot\eta^2\nu,$$

bezogen auf das Achsenkreuz durch den Rahmenschwerpunkt:

$$\int M_o\, y\, ds' = F_o\left[-\left(z_u - \frac{r}{3}\right)\right],$$

wobei

$$\begin{aligned} z_u - \frac{r}{3} &= \frac{1}{3}\left[\frac{3(1+\nu)}{1+2\nu}\cdot h - r\right] \\ &= \frac{h}{3(1+2\nu)}\cdot[3(1+\nu) - \eta(1+2\nu)]. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\int M_o\, y\, ds' = +\frac{W\cdot h^2 l\cdot\eta^2}{6}\cdot\frac{\nu}{1+2\nu}\cdot[3(1+\nu) - \eta(1+2\nu)].$$

Schließlich ist in entsprechender Weise:

$$\int M_o\, x\, ds' = F_o\left(-\frac{l}{2}\right) = +\frac{1}{4}\, W \,.\, h \,.\, l^2\, \eta^2\, \nu.$$

Unter Einführung dieser Werte ergeben sich die drei statisch unbestimmbaren Größen zu

$$X = \int \frac{M_o\, y\, ds'}{T_x} = +\frac{W}{2} \cdot \frac{\eta^2}{2+\nu} \cdot [3(1+\nu) - \eta(1+2\nu)]$$

$$Y = \int \frac{M_o\, x\, ds'}{T_y} = +\frac{3\, W \,.\, h}{l} \cdot \eta^2 \frac{\nu}{1+6\nu}$$

$$Z = \int \frac{M_o\, ds'}{G} = -\frac{W}{2} \cdot h \cdot \eta^2 \frac{\nu}{1+2\nu}.$$

Nach Abb. 57b ist unter Berücksichtigung der Regel, daß die auf den Trägerteil links vom Schnitt im Uhrzeigersinne wirkenden Momente negativ sind:

$$M_C = +X \,.\, z_u - Y \cdot \frac{l}{2} - Z \quad \text{und} \quad \mu_C = \frac{M_C}{\mathfrak{M}_K}$$

$$M_B = -X \,.\, z_o - Y \cdot \frac{l}{2} - Z \quad \text{,,} \quad \mu_B = \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K}$$

$$M_A = -X \,.\, z_o + Y \cdot \frac{l}{2} - Z \quad \text{,,} \quad \mu_A = \frac{M_A}{\mathfrak{M}_K}$$

$$M_D = \mathfrak{M}_K + X \,.\, z_u + Y \cdot \frac{l}{2} - Z \quad \text{,,} \quad \mu_D = \frac{M_D}{\mathfrak{M}_K}.$$

Durch Einsetzen der Werte für X, Y und Z sowie für z_o und z_u und $\mathfrak{M}_K = -W \,.\, r = -W \,.\, h \,.\, \eta$ ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_A &= -\frac{\eta \,.\, \nu}{2\,\alpha_2} \cdot \left(\frac{5-3\nu}{\beta_2} + \eta\right) \\
\mu_B &= +\frac{\eta \,.\, \nu}{2\,\alpha_2} \cdot \left(\frac{7+9\nu}{\beta_2} - \eta\right) \\
\mu_C &= -\frac{\eta}{2\,\alpha_2} \cdot \left[\frac{3+14\nu+9\nu^2}{\beta_2} - \eta(1+\nu)\right] \\
\mu_D &= +1 - \frac{\eta}{2\,\alpha_2} \cdot \left[\frac{3+26\nu+15\nu^2}{\beta_2} - \eta(1+\nu)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

wobei wiederum $\alpha_2 = 2+\nu$ und $\beta_2 = 1+6\nu$ sind.

5. Wagerechte Einzellast in der oberen Rahmenecke. Setzt man in den Gleichungen 11) $r = h$, $\eta = \frac{r}{h} = 1$, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_A &= -\frac{3\nu}{2\,\beta_2} \\
\mu_B &= +\frac{3\nu}{2\,\beta_2} \\
\mu_C &= -\frac{1+3\nu}{2\,\beta_2} \\
\mu_D &= +\frac{1+3\nu}{2\,\beta_2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

wobei $\mathfrak{M}_K = -W \cdot h$, also z. B. $\mu_A = \frac{M_A}{-W \cdot h}$ ist. Es ist also $\mu_A = -\mu_B$ und $\mu_C = -\mu_D$.

Im Gegensatz zu Fall 2) und 3) mit symmetrischer senkrechter Belastung, in denen der Nennerwert β_2 herausfällt und nur α_2 verbleibt, verschwindet hier α_2, der zur wagrechten Kraft X gehörige Nennerwert.

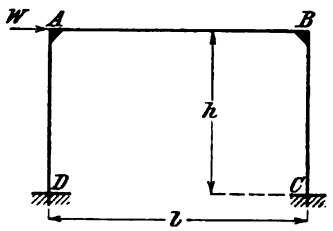


Abb. 58.

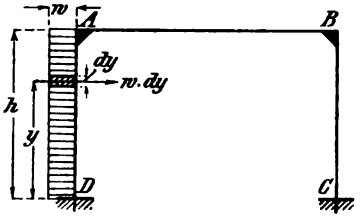


Abb. 59.

6. Wagerechte, gleichmäßig verteilte Belastung. Nach Abb. 59 ist mit $r = y$

$$\frac{r}{h} = \frac{y}{h} = \eta,$$

also

$$dy = h \cdot d\eta.$$

Ferner:

$$d\mathfrak{M}_K = -w \cdot dy \cdot y = -w \cdot h^2 \eta \cdot d\eta.$$

Nun ist:

$$M_C = \int \mu_C \cdot d\mathfrak{M}_K$$

oder nach Gleichung 11)

$$M_C = +\int_0^1 \frac{w \cdot h^2 \cdot \eta^2 \cdot d\eta}{2(2+\nu)(1+6\nu)} \cdot [3 + 14\nu + 9\nu^2 - \eta(1 + 7\nu + 6\nu^2)]$$

$$= \frac{w \cdot h^2}{24} \cdot \frac{9 + 35\nu + 18\nu^2}{(2+\nu)(1+6\nu)}.$$

Da hier $\mathfrak{M}_K = -w \cdot h \cdot \frac{h}{2} = -\frac{w \cdot h^2}{2}$ ist, so wird

$$\mu_C = \frac{M_C}{\mathfrak{M}_K} = -\frac{9 + 35\nu + 18\nu^2}{12(2+\nu)(1+6\nu)} = -\frac{9 + 35\nu + 18\nu^2}{12\alpha_2\beta_2}$$

In gleicher Weise ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= -\frac{\nu}{12\alpha_2\beta_2} \cdot (23 + 6\nu) \\ \mu_B &= +\frac{\nu}{12\alpha_2\beta_2} \cdot (25 + 18\nu) \\ \mu_D &= +\frac{1}{12\alpha_2\beta_2} \cdot (15 + 73\nu + 30\nu^2) \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

wobei der Nenner $12\alpha_2 \cdot \beta_2 = 12 \cdot (2+\nu)(1+6\nu)$ ist.

7. Wagerechte dreieckförmige Belastung. In genau derselben Weise wie bei der gleichen Belastungsart des Gelenkrahmens (Seite 35) erhält man hier nach Abb. 60

$$M_C = -2W \cdot h \int_0^1 \mu_C \cdot (1-\eta)\,\eta \cdot d\eta.$$

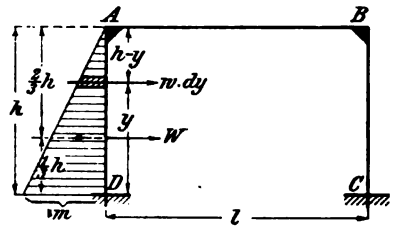


Abb. 60.

Nach Formel 11 (S. 43) ist

$$\mu_C = -\frac{\eta\,(n_1 - \eta \cdot n_2)}{2\,(2+\nu)\,(1+6\,\nu)},$$

wenn

$$n_1 = 3 + 14\,\nu + 9\,\nu^2$$

und

$$n_2 = 1 + 7\,\nu + 6\,\nu^2$$

gesetzt wird. Folglich wird

$$M_C = +2W \cdot h \int_0^1 \frac{\eta}{2\,(2+\nu)\,(1+6\,\nu)} \cdot (n_1 - \eta \cdot n_2)\,(1-\eta)\,\eta \cdot d\eta$$

$$= +\frac{W \cdot h}{60\,(2+\nu)\,(1+6\,\nu)} \cdot (5\,n_1 - 3\,n_2)$$

$$= +\frac{W \cdot h}{60\,(2+\nu)\,(1+6\,\nu)} \cdot (12 + 49\,\nu + 27\,\nu^2).$$

Da hier $\mathfrak{M}_K = -\frac{W \cdot h}{3}$ ist, so wird

$$\left.\begin{aligned} \mu_C &= -\frac{1}{20\,\alpha_2\,\beta_2} \cdot (12 + 49\,\nu + 27\,\nu^2) \\ \text{In gleicher Weise erhält man} & \\ \mu_A &= -\frac{\nu}{20\,\alpha_2\,\beta_2} \cdot (28 + 3\,\nu) \\ \mu_B &= +\frac{\nu}{20\,\alpha_2\,\beta_2} \cdot (32 + 27\,\nu) \\ \mu_D &= +\frac{1}{20\,\alpha_2\,\beta_2} \cdot (28 + 151\,\nu + 63\,\nu^2) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 14)$$

wobei der Nenner $20\,\alpha_2\,\beta_2 = 20 \cdot (2+\nu)\,(1+6\,\nu)$ ist.

E. Der vierseitige Rahmen.

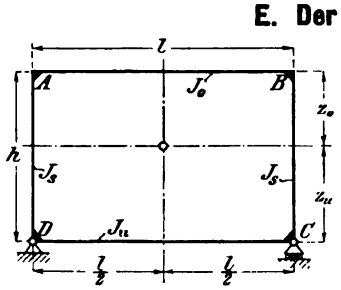


Abb. 61.

Voraussetzung möge sein, daß der vierseitige Rahmen der Abb. 61 statisch bestimmt gestützt (vergl. S. 10) und symmetrisch zur lotrechten Mittellinie gestaltet sei, so daß auch das gleiche Trägheitsmoment J_s für beide Pfosten angenommen wird.

Außer dem Verhältnis der Trägheitsmomente J_o des Balkens AB zu dem

der Pfosten J_s kommt hier noch das Verhältnis von J_o zu dem Trägheitsmoment des unteren Riegels J_u hinzu, wodurch die Formeln wesentlich verwickelter werden. Es ist daher hier nicht die Erörterung der allgemeinen Fälle einer senkrechten und wagrechten Einzellast in beliebiger Lage, wie in Abschnitt C und D, durchgeführt worden, sondern nur die der hauptsächlich vorkommenden Fälle der gleichmäßig verteilten Belastung des oberen Balkens, des Pfostens und des unteren Riegels sowie einer wagerechten Einzellast in der oberen Rahmenecke. Als Bezeichnungen seien eingeführt

$$\frac{J_o}{J_s}\cdot h = h', \qquad \frac{J_o}{J_s}\cdot\frac{h}{l} = \frac{h'}{l} = \nu$$

$$\frac{J_o}{J_u}\, l\cdot = l', \qquad \frac{J_o}{J_u} = \frac{l'}{l} = \omega.$$

I. Senkrechte Belastung.

Nach Müller-Breslau a. a. O., S. 122, ist

$$X = \int \frac{M_o\, y\cdot ds'}{T_x}, \qquad \text{wobei } T_x = \int y^2\, ds'$$

$$Y = \int \frac{M_o\, x\cdot ds'}{T_y}, \qquad \text{„ } T_y = \int x^2\, ds'$$

$$Z = \int \frac{M_o\cdot ds'}{G}, \qquad \text{„ } G = \int ds'$$

ist. Für symmetrische Belastung wird genau wie beim dreiseitigen, fest eingespannten Rahmen $Y = 0$. Ordnet man nach fallenden Potenzen von ν und nach steigenden von ω, so ergibt sich

$$G = (2\nu + 1 + \omega)\, l$$

$$z_o = \frac{\nu + \omega}{2\nu + 1 + \omega}\cdot h \qquad z_u = \frac{\nu + 1}{2\nu + 1 + \omega}\cdot h$$

und $$T_x = l z_o^2 + l'\cdot z_u^2 + 2\cdot\frac{1}{3}h'\,(z_o^2 - z_o\cdot z_u + z_u^2)$$

oder $$T_x = \frac{h^2\cdot l}{3\,(2\nu + 1 + \omega)}\cdot[\nu^2 + 2\nu\,(1+\omega) + 3\omega],$$

ferner

$$T_y = 2h'\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}(l + l')\cdot\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]$$

oder $$T_y = \frac{l^3}{12}\cdot(6\nu + 1 + \omega).$$

1. Gleichmäßig verteilte Last auf dem oberen Balken.

Nach Müller-Breslau, S. 117, ist (Abb. 62)

$$\int M_o\, y\, ds' = \frac{J_c}{J_o}\cdot F_o\cdot y_s,$$

wobei J_c ein Bezugsmoment bedeutet, dessen Größe beliebig gewählt werden kann und hier gleich J_o angenommen wird.

Folglich ergibt sich für

$$\frac{J_c}{J_o} = 1, \quad F_o = \frac{2}{3} l \cdot \frac{p l^2}{8} = \frac{p l^3}{12} \quad \text{und} \quad y_s = z_o = \frac{\nu + \omega}{2\nu + 1 + \omega} \cdot h$$

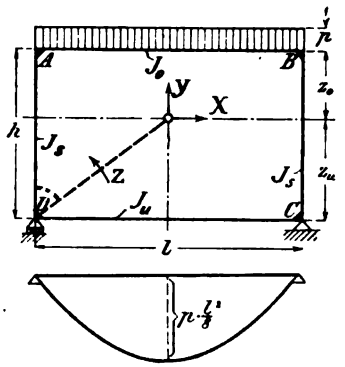


Abb. 62.

$$\int M_o \, y \, ds' = \frac{p l^3}{12} \cdot \frac{\nu + \omega}{2\nu + 1 + \omega} \cdot h.$$

Ferner

$$\int M_o \, x \, ds' = \frac{J_c}{J_o} \cdot F_o \cdot x_s = 0,$$

da $x_s = 0$ ist, und

$$\int M_o \, ds' = \frac{J_c}{J_o} \cdot F_o = \frac{p l^3}{12}.$$

Somit wird, da

$$X = \int \frac{M_o \cdot y \, ds'}{T_x} \text{ ist,}$$

$$\begin{cases} X = -\dfrac{p l^2 (\nu + \omega)}{4 h [\nu^2 + 2\nu (1 + \omega) + 3\omega]} \\ Y = 0 \\ Z = \int \dfrac{M_o \, ds'}{G} = \dfrac{p l^2}{12 (2\nu + 1 + \omega)} \end{cases}$$

Da symmetrische Belastung vorliegt, also $Y = 0$, ergibt sich

$$\begin{cases} M_D = + X \cdot z_u - Z \\ M_A = - X \cdot z_o - Z \\ M_B = - X \cdot z_o - Z \\ M_C = + X \cdot z_u - Z \end{cases}$$

Wie in Abschnitt C. und D. mögen wiederum für die Nennerglieder der statisch unbestimmten Größen besondere Bezeichnungen eingeführt werden, und zwar für das von X:

$$\alpha_3 = [\nu^2 + 2\nu (1 + \omega) + 3\omega]$$

und für das von Z:

$$\gamma_3 = 2\nu + 1 + \omega.$$

Setzt man nunmehr die Werte für X, Y, z_o und z_u in die Ausdrücke der Eckmomente ein, so erhält man

$$M_D = \frac{p l^2 (\nu + \omega)}{4 \cdot h \cdot \alpha_3} \cdot \frac{\nu + 1}{\gamma_3} \cdot h - \frac{p \cdot l^2}{12 \gamma_3}$$

$$= \frac{p \cdot l^2}{8} \cdot 2 \left[\frac{(\nu + \omega)(\nu + 1)}{\alpha_3 \gamma_3} - \frac{1}{3 \gamma_3} \right].$$

Folglich ist

$$\mu_D = \frac{M_D}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{M_D}{\frac{p l^2}{8}},$$

also

$$\mu_D = + \frac{2\nu}{3 \alpha_3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15\text{d})$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\mu_A = -\frac{2(2\nu + 3\omega)}{3\alpha_3} \quad \ldots\ldots 15a)$$

Ferner ist infolge der Symmetrie

$$\left.\begin{aligned} \mu_C &= \mu_D \\ \mu_B &= \mu_A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 15)$$

und

Bezeichnen wir nun das Verhältnis der Biegungsmomente M_A und M_D an den Enden des linken Pfostens mit m, so ist aus diesem Verhältnis

$$m = \frac{M_A}{M_D} = \frac{\mu_A}{\mu_D} = \frac{2\nu + 3\omega}{\nu}$$

die Entfernung des Wendepunktes der Biegelinie des Ständers von der oberen Ecke wie folgt zu ermitteln (Abb. 63):

$$\frac{h_1}{h - h_1} = \frac{M_A}{M_D} = m$$

$$h_1 = \frac{m}{1 + m} \cdot h.$$

Durch Einsetzen des Wertes für m wird

$$h_1 = \frac{2\nu + 3\omega}{3\nu + \omega} \cdot h \quad \ldots\ldots 15')$$

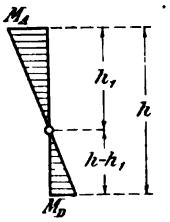


Abb. 63.

Durch die Kenntnis der Lage der Wendepunktes ist eine Berechnung des vierseitigen Rahmens als dreiseitiger Gelenkrahmen durchführbar, wenn man die Wendepunkte als Gelenklager auffaßt. Eine geringe Abweichung dieser Berechnung von den durch genaue Bestimmung ermittelten Werten erklärt sich daraus, daß beim Viereckgefach die Wendepunkte elastische Verschiebungen erleiden, während man beim dreiseitigen Gelenkrahmen diese festliegend annimmt. Die Abweichung ist um so größer, je elastischer die Stütze ist; die bleibt aber verhältnismäßig klein. Bei genauer Rechnung ergibt sich für

$\nu =$	0,25	eine Differenz von 0,448 vH.
	0,33 ...	0,700
	0,5	1,25
	0,66 ...	1,805
	1,0	2,86
	1,33 ...	3,76
	2,0	5,20
	4,0	7,75

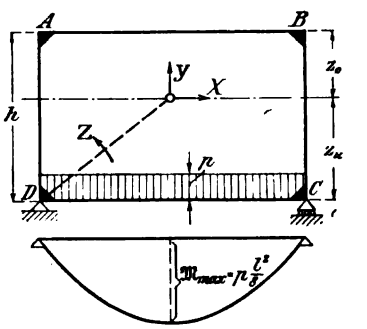


Abb. 64.

2. Gleichmäßig verteilte Last auf dem unteren Balken.

Für diesen Fall ergeben sich die statisch unbestimmbaren Größen in ganz ähnlicher Weise; zu beachten ist allerdings, daß das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_{max}$ hier negativ einzuführen ist, da es an der Innenseite des Rahmens Druck erzeugt, also $\mathfrak{M}_{max} = -\frac{pl^2}{8}$ (Abb. 64).

Man erhält

$$\mu_A = \mu_B = + \frac{2\nu \cdot \omega}{3\alpha_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16a, b)$$

$$\mu_C = \mu_D = - \frac{2\omega \cdot (2\nu + 3)}{3\alpha_3} \quad \ldots \quad 16c, d)$$

wobei ν, ω und α_3 dieselben Werte wie in Fall 1 bedeuten.

II. Wagerechte Belastung.

3. Wagerechte, gleichmäßig verteilte Belastung.

Wird der Pfosten AD des vierseitigen Rahmens $ABCD$ durch eine gleichmäßig verteilte wagerechte Belastung beansprucht, so ergeben sich die Stützendrücke

$$-A = B = -\frac{W \cdot h}{2l}.$$

Die Momentenfläche des statisch bestimmten freien Kragträgers DA mit gleichmäßig verteilter Belastung ist dann eine Parabel (Abb. 65b)

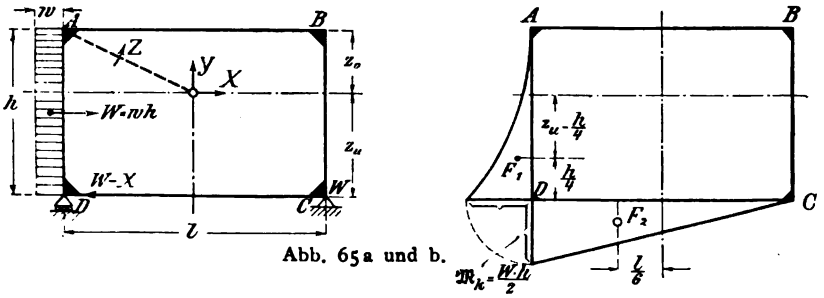


Abb. 65a und b.

mit dem Scheitel in A und dem Schwerpunkte in ein Viertel der Höhe. Das Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_K$ desselben bei D ergibt sich zu

$$\mathfrak{M}_K = -w \cdot h \cdot \frac{h}{2} = -\frac{w \cdot h^2}{2} = -\frac{W \cdot h}{2}.$$

Im Gegensatz zu den Fällen 1) und 2) mit senkrechter Belastung, wo bei freier Stützung die Momente an den Ecken der Balken gleich Null sind, beeinflußt dieses negative Eckmoment $\mathfrak{M}_K$ auch den unteren Stab DC, dessen Momentenfläche geradlinig verläuft, da keine äußere Kraft auf ihn wirkt.

Die Momentenfläche des statisch bestimmten Hauptsystems setzt sich somit aus zwei Flächen F_1 und F_2 zusammen, und zwar aus

$$F_1 = -\frac{1}{3}\frac{J_o}{J_s} \cdot \frac{W.h}{2} \cdot h = -\frac{1}{6} \cdot W.h.l.\nu$$

und

$$F_2 = -\frac{1}{2}\frac{J_o}{J_u} \cdot \frac{W.h}{2} \cdot l = -\frac{1}{4} \cdot W.h.l.\omega.$$

Somit ist

$$\int M_o\, ds' = F_1 + F_2 = -\frac{W.h.l}{12}(2\nu + 3\omega).$$

Man setze wie bei der senkrechten Belastung:

$$G = (2\nu + 1 + \omega).l = \gamma_3 . l,$$

also

$$z_o = \frac{\nu + \omega}{2\nu + 1 + \omega}\cdot h = \frac{\nu + \omega}{\gamma_3}\cdot h$$

$$z_u = \frac{\nu + 1}{2\nu + 1 + \omega}\cdot h = \frac{\nu + 1}{\gamma_3}\cdot h$$

und

$$T_x = \frac{h^2 . l}{3(2\nu + 1 + \omega)}\cdot[\nu^2 + 2\nu(1 + \omega) + 3\omega] = \frac{h^2 l \alpha_3}{3\gamma_3}$$

$$T_y = \frac{l^3}{12}\cdot(6\nu + 1 + \omega) = \frac{l^3 \beta_3}{12},$$

wobei

$$\beta_3 = 6\nu + 1 + \omega$$

als die zu Y gehörige Nennergröße eingeführt wird.

Ferner wird

$$\int M_o\, y\, ds' = +\frac{1}{6} W.h\,l\nu.\left(z_u - \frac{h}{4}\right) + \frac{1}{4} W.h\,l\omega.z_u.$$

Da

$$z_u - \frac{h}{4} = \frac{\nu + 1}{\gamma_3}\cdot h - \frac{h}{4} = \frac{h}{4}\,\frac{2\nu + 3 - \omega}{\gamma_3}$$

ist, wird

$$\int M_o\, y\, ds' = +\frac{1}{24} W.h^2.l\nu\,\frac{2\nu + 3 - \omega}{\gamma_3} + \frac{1}{4} W.h^2.l\omega\,\frac{\nu + 1}{\gamma_3}$$

$$= +\frac{W.h^2.l}{24\gamma_3}[2\nu^2 + \nu.(3 + 5\omega) + 6\omega].$$

Endlich wird:

$$\int M_o\, x\, ds' = -\frac{1}{6} W.h.l\nu\cdot\frac{l}{2} - \frac{1}{4} W.h.l\omega\cdot\frac{l}{6}$$

$$= -\frac{W.h.l^2}{24}\cdot(2\nu + \omega).$$

Somit ergibt sich, da $X = \int \frac{M_o\, y\, ds'}{T_x}$ ist

$$X = \frac{\frac{W.h^2.l}{24\gamma_3}\cdot[2\nu^2 + \nu(3 + 5\omega) + 6\omega]}{\frac{h^2 l}{3\gamma_3}\cdot\alpha_3}$$

oder

$$X = \frac{W}{8\alpha_3}\cdot[2\nu^2 + \nu(3 + 5\omega) + 6\omega]$$

$$Y = \int \frac{M_o\, x\, ds'}{T_y} = \frac{-\frac{W.h.l^2}{24}(2\nu+\omega)}{\frac{l^3\beta_3}{12}} = -\frac{W.h(2\nu+\omega)}{2l.\beta_3}$$

$$Z = \int \frac{M_o\, ds'}{G} = \frac{-\frac{W.h.l}{12}(2\nu+3\omega)}{\gamma_3 . l} = -\frac{W.h}{12\gamma_3}(2\nu+3\omega).$$

Nach Abb. 65a sind die Eckmomente:

$$M_D = \mathfrak{M}_K + X.z_u - Y\cdot\frac{l}{2} - Z$$

$$M_A = \quad -X.z_o - Y\cdot\frac{l}{2} - Z$$

$$M_B = \quad -X.z_o + Y\cdot\frac{l}{2} - Z$$

$$M_C = \quad +X.z_u + Y\cdot\frac{l}{2} - Z.$$

Durch Einsetzen der Werte X, Y, Z und $\mathfrak{M}_K$, z_o und z_u ergibt sich nun:

$$M_D = -\frac{W.h}{2} + \frac{W}{8\alpha_3}\cdot[2\nu^2+\nu.(3+5\omega)+6\omega]\cdot\frac{\nu+1}{\gamma_3}\cdot h$$
$$+\frac{W.h}{2l\beta_3}\cdot(2\nu+\omega)\cdot\frac{l}{2}+\frac{W.h}{12\gamma_3}\cdot(2\nu+3\omega)$$
$$= -\frac{W.h}{2}\left\{1-\frac{[2\nu^2+\nu(3+5\omega)+6\omega](\nu+1)}{4\alpha_3\cdot\gamma_3}-\frac{2\nu+\omega}{2\beta_3}-\frac{2\nu+3\omega}{6\gamma_3}\right\}.$$

Da $\mu_D = \frac{M_D}{\mathfrak{M}_K}$ und $\mathfrak{M}_K = -\frac{W.h}{2}$, wird:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_D &= +\frac{1}{12\alpha_3\beta_3}[(30\nu^2+73\nu+15)\nu+(49\nu^2+87\nu+18)\omega]\\
&\text{In gleicher Weise erhält man:}\\
\mu_A &= -\frac{1}{12\alpha_3\beta_3}[(6\nu+23)\nu^2+(11\nu+45)\nu\cdot\omega+(9\nu+18)\omega^2]\\
\mu_B &= +\frac{1}{12\alpha_3\beta_3}[(18\nu+25)\nu^2+(49\nu+51)\nu\cdot\omega+(15\nu+18)\omega^2]\\
\mu_C &= -\frac{1}{12\alpha_3\beta_3}[(18\nu^2+35\nu+9)\nu+(47\nu^2+81\nu+18)\omega]
\end{aligned}\right\} 17)$$

4. Wagerechte Einzellast in oberer Rahmenecke.

Für diesen Fall ergeben sich in ähnlicher Weise die drei statisch unbestimmbaren Größen zu

$$X=\frac{W}{2},\qquad Y=-\frac{W\cdot h}{l}\cdot\frac{3\nu+\omega}{\beta_3},\qquad Z=-\frac{Wh}{2}\cdot\frac{3\nu+\omega}{\gamma_3}$$

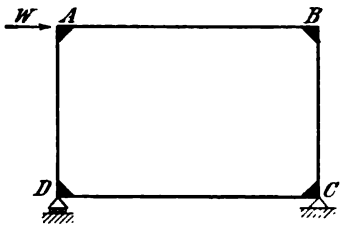


Abb. 66.

$$\left.\begin{aligned}\mu_A&=-\frac{3\nu+\omega}{2\beta_3}\\ \mu_B&=+\frac{3\nu+\omega}{2\beta_3}\\ \mu_C&=-\frac{3\nu+1}{2\beta_3}\\ \mu_D&=+\frac{3\nu+1}{2\beta_3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad 18)$$

Sollen diese Formeln für Belastung des rechten Pfostens verwendet werden, so ist μ_A mit μ_B und μ_C mit μ_D zu vertauschen.

F. Beziehungen zwischen den Werten des Einspannungsgrades.

Die Betrachtung der in den vorhergehenden Abschnitten C, D und E berechneten Ausdrücke für den Einspannungsgrad (Gleichung 1 bis 18) läßt bemerkenswerte Beziehungen zwischen den für die Ecken eines Rahmens ermittelten Werte erkennen, die besonders für die im dritten Teil angestellten Betrachtungen von Wichtigkeit sind.

I. Für den dreiseitigen Gelenkrahmen

gelten nach S. 29 u. 33 folgende Beziehungen:

a) Bei beliebiger senkrechter Belastung (Abb. 67), da der wagerechte Rahmenschub an beiden Fußgelenken gleich sein muß, also:

$$\left.\begin{aligned}M_A&=-Xh \text{ und } \mu_A=\frac{-Xh}{\mathfrak{M}_{max}}\\ M_B&=-Xh \;\;„\;\; \mu_B=\frac{-Xh}{\mathfrak{M}_{max}},\end{aligned}\right.$$

so ist demnach:

$$M_A-M_B=0\quad\ldots\quad Ia')$$

und

$$\mu_A-\mu_B=0\quad\ldots\quad Ia)$$

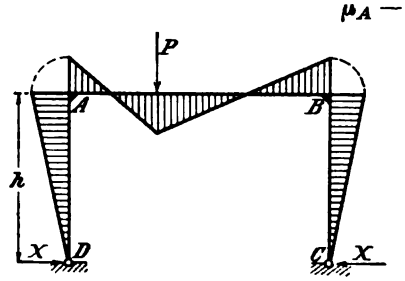


Abb. 67.

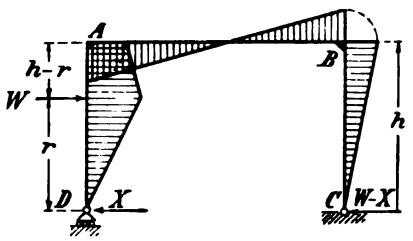


Abb. 68.

b) Bei wagrechter Belastung ist nach Abb. 68:

$$M_B = -(W - X) \cdot h$$
$$M_A = -W \cdot (h - r) + Xh,$$

also

$$M_A - M_B = +W \cdot r = -\mathfrak{M}_K \quad \ldots \quad \text{IIa'})$$

und

$$\frac{M_A}{\mathfrak{M}_K} - \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K} = -1$$

oder

$$\mu_A - \mu_B = -1 \quad \ldots \quad \text{IIa})$$

In Worten ausgedrückt, lauten diese beiden Grundgleichungen für den Gelenkrahmen: Bildet man die Differenzen der beiden Einspannungsgrade, so ergibt sich bei senkrechter Belastung Null, bei wagrechter Belastung -1 oder $+1$, je nachdem der linke oder der rechte Pfosten belastet ist.

II. Für den dreiseitigen eingespannten Rahmen.

a) Bei senkrechter Belastung (Abb. 69) ergibt sich nach S. 38 u. 39:

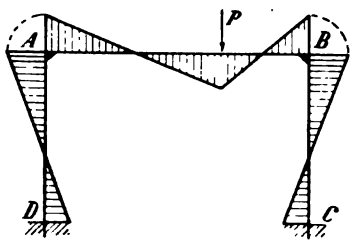


Abb. 69.

$$\left\{\begin{aligned} M_D &= +X \cdot z_u - Y \cdot \frac{l}{2} - Z \\ M_A &= -X \cdot z_o - Y \cdot \frac{l}{2} - Z \\ M_B &= -X \cdot z_o + Y \cdot \frac{l}{2} - Z \\ M_C &= +X \cdot z_u + Y \cdot \frac{l}{2} - Z \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt:

$$M_A - M_B + M_C - M_D = 0$$

oder

$$(M_A - M_B) - (M_D - M_C) = 0 \quad \ldots \quad \text{Ib'})$$

Demnach auch

$$\left(\frac{M_A}{\mathfrak{M}_{max}} - \frac{M_B}{\mathfrak{M}_{max}}\right) - \left(\frac{M_D}{\mathfrak{M}_{max}} - \frac{M_C}{\mathfrak{M}_{max}}\right) = 0$$

oder

$$(\mu_A - \mu_B) - (\mu_D - \mu_C) = 0 \quad \ldots \quad \text{Ib})$$

Diese Grundgleichung für den senkrecht belasteten eingespannten Rahmen läßt sich in folgender Regel aussprechen: Bildet man für die Eckmomente oder die Einspannungsgrade die Differenzen der Werte an den beiden oberen Ecken A und B, ebenso an den beiden unteren Ecken D und C, so sind beide Ergebnisse gleich groß.

b) Bei wagrechter Belastung (Abb. 70) ist nach S. 43:

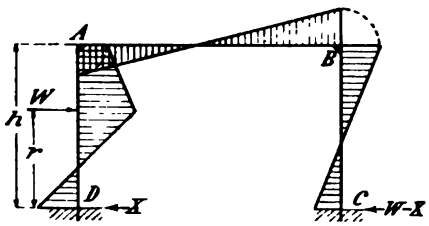


Abb. 70.

$$\left\{\begin{aligned} M_C &= +X\cdot z_u - Y\cdot\frac{l}{2} - Z \\ M_B &= -X\cdot z_o - Y\cdot\frac{l}{2} - Z \\ M_A &= -X\cdot z_o + Y\cdot\frac{l}{2} - Z \\ M_D &= +X\cdot z_u + Y\cdot\frac{l}{2} - Z \end{aligned}\right. + \mathfrak{M}_K.$$

Hieraus folgt:

$$M_A - M_B + M_C - M_D = -\mathfrak{M}_K$$

oder

$$(M_A - M_B) - (M_D - M_C) = -\mathfrak{M}_K \quad \ldots \quad \text{IIb'})$$

Demnach ist

$$\left(\frac{M_A}{\mathfrak{M}_K} - \frac{M_B}{\mathfrak{M}_K}\right) - \left(\frac{M_D}{\mathfrak{M}_K} - \frac{M_C}{\mathfrak{M}_K}\right) = -1$$

oder

$$(\mu_A - \mu_B) - (\mu_D - \mu_C) = -1 \quad \ldots \quad \text{IIb)}$$

Diese Grundgleichung für den wagrecht belasteten eingespannten Rahmen läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Bildet man für die Einspannungsgrade die Differenzen der Werte an den beiden oberen Ecken A und B sowie an den beiden unteren Ecken D und C und subtrahiert beide Ergebnisse voneinander, so erhält man stets den Wert -1 oder $+1$, je nachdem der linke oder der rechte Pfosten belastet ist.

III. Für den vierseitigen Rahmen.

Da die Ausdrücke für die vier Eckmomente des vierseitigen Rahmens sich bei gleichartiger Belastung und gleicher Anordnung der statisch unbestimmten Größen mit denen des eingespannten dreiseitigen Rahmens decken (vergl. z. B. S. 43 u. 51), ergeben sich für den vierseitigen dieselben Grundgleichungen II) u. II') wie beim eingespannten Rahmen und ebenso die daraus abgeleiteten Beziehungen zwischen den vier Eckmomenten.

IV. Zusammenfassung.

Um die Benutzung der im vorliegenden II. Teil hergeleiteten Formeln für den Einspannungsgrad zu erleichtern, sind dieselben in einer besonderen Tafel am Schlusse nochmals übersichtlich zusammengestellt worden. Eine weitere Erläuterung scheint nach den vorausgegangenen Ausführungen entbehrlich.

Die Probe für die Richtigkeit der darin enthaltenen Formeln besteht darin, daß die Grundgleichungen I) u. II) allenthalben erfüllt sind. Bemerkenswert ist noch, daß beim dreiseitigen eingespannten Rahmen bei der Differenz $(\mu_A - \mu_B)$ und $(\mu_D - \mu_C)$ der von X abhängige Nennerwert α_2 herausfällt. Umgekehrt geschieht das gleiche mit dem von Y abhängigen Nennerwert β_2, wenn man die Diffe-

renzen $(\mu_A - \mu_D)$ und $(\mu_B - \mu_C)$ bildet. Subtrahiert man die so erhaltenen Werte voneinander, so erhält man ebenfalls o bezw. 1, wie es die Gleichungen I) u. II) erfordern.

Die hauptsächlichste Bedeutung dieser vier Grundgleichungen I) u. II) besteht aber darin, daß, wenn die Einspannungsgrade für drei Rahmenecken bekannt sind, der Einspannungsgrad für die vierte Ecke sich durch eine einfache algebraische Summierung ergibt. Beim Gelenkrahmen, für den der Einspannungsgrad an den beiden unteren Ecken $\mu_D = \mu_C = 0$ ist, genügt daher die Ermittlung nur eines Wertes von μ, während man den anderen nach Gleichung Ia) oder IIa) erhält. Diese Beziehungen beruhen darauf, daß der dreiseitige eingespannte und der vierseitige Rahmen dreifach statisch unbestimmt sind, der Gelenkrahmen einfach statisch unbestimmt ist und die fehlende vierte bezw. zweite Größe auf rein statischem Wege sich ergeben muß.

Der vierseitige Rahmen kann als die allgemeinste Rahmenform angesehen werden, aus der sich sowohl der dreiseitige Gelenkrahmen als auch der fest eingespannte Rahmen herleiten läßt. Beim dreiseitigen Rahmen tritt an die Stelle des vierten Stabes die Erdscheibe, die auf die Fußpunkte der Rahmenpfosten im ersten Falle nur die Unverschieblichkeit oder aber im anderen Falle die vollkommene Unbeweglichkeit überträgt. Setzt man also für den unteren wagerechten Stab CD das Trägheitsmoment $J_u = 0$, so erhält man den Fall einer freien Drehbarkeit der beiden Pfostenfüße; umgekehrt entspricht $J_u = \infty$ der vollkommen festen Einspannung derselben. Aus der Betrachtung der Zusammenstellung am Schlusse ergibt sich, daß man die Formeln des dreiseitigen Rahmens aus denen des vierseitigen Rahmens erhält, wenn in ihnen $\omega = \frac{J_o}{J_u} = \infty$ oder aber $\omega = 0$ gesetzt wird.

Bemerkenswert ist hierbei noch, daß sich auch die Gleichungen Ia) u. IIa) für den Gelenkrahmen als durchaus sinngemäße Vereinfachungen der Gleichungen Ib) u. IIb) für den eingespannten Rahmen ergeben.

Für $\mu_D = 0$ und $\mu_C = 0$ erhält man aus

$$(\mu_A - \mu_B) - (\mu_D - \mu_C) = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

sowie aus

$$(\mu_A - \mu_D) - (\mu_B - \mu_C) = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases},$$

in beiden Fällen

$$\mu_A - \mu_B = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}.$$

Von besonderer Bedeutung für das Verständnis der Wirkung eines Rahmens bei wagerechter Belastung ist der Vergleich der Eckmomente desselben mit dem Einspannungsmoment eines freien Kragträgers. Nach Gleichung IIa') u. IIb') ist unter Berücksichtigung des Vorzeichens nach Abb. 70 die Summe der Streckengrößen für die vier Eckmomente gleich dem Wert des Einspannungsmoments $\mathfrak{M}_K$ für den statisch bestimmten Kragträger, oder, anders gesagt, das Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_K$ des gedachten

freien Kragträgers wird durch die vier steifen Ecken des festen Rahmens aufgenommen.

Während der senkrecht belastete Balken an seinen beiden Enden durch die Pfosten gestützt ist und durch die Steifigkeit derselben nur seine Formänderung und damit seine Biegungsmomente vermindert werden, ist der Gelenkrahmen für einseitige wagerechte Kräfte verhältnismäßig wenig widerstandsfähig. Obgleich die wagerechten Kräfte W an den beiden Fußpunkten oder Lagern durch die statisch unbestimmbaren Schubkräfte X und $(W - X)$ aufgenommen werden, ist der Rahmen bezüglich der Formänderung und der Beanspruchungen als ein Kragträger aufzufassen, der nach den Grundgleichungen II) das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_K = - W \cdot r$ genau in derselben Weise wie jeder freie Kragarm aufzunehmen hat. Da beim Gelenkrahmen eine Einspannung der Pfostenfüße nicht vorhanden ist, sind die beiden Ecken so steif auszubilden, daß sie beide zusammen das Moment $\mathfrak{M}_K$ aufnehmen können. Die an die Ecken anschließenden Stäbe müssen naturgemäß ebenfalls dieser Momentenverteilung entsprechend bemessen sein. Beim eingespannten und vierseitigen Rahmen dagegen beteiligen sich auch die beiden unteren Ecken an der Aufnahme dieses Kragmoments. Bei der Prüfung des Entwurfs eines Rahmens ist somit vor allem festzustellen, ob nach den Grundgleichungen II) das Kragmoment $\mathfrak{M}_K$ von den Ecken sicher aufgenommen wird.

Diese Betrachtungen bestätigen die Wichtigkeit einer sorgfältigen konstruktiven Ausbildung der Rahmenecken, an denen nicht nur die plötzliche Ueberführung der Längs- und Querkräfte aus der einen Richtung in die andere erfolgt, sondern von deren Festigkeit auch die Tragfähigkeit des Rahmens bei wagerechten Beanspruchungen hauptsächlich abhängt.[1])

III. Die Formänderung der Rahmen und die Mittelkraftlinien.

A. Vergleich der Formänderung von Dreiecks- und Viereckgefachen.

Bei dem Dreiecksgefach, der klarsten und wirtschaftlichsten Grundform des Eisenbaues, erfährt jeder Stab infolge der in den Knotenpunkten wirkenden Belastung eine Verlängerung oder Verkürzung. Unter der Annahme frei drehbarer, gelenkiger Knotenverbindungen geht daher jedes Stabdreieck in ein verschobenes Dreieck über, ohne daß eine Verbiegung der Stäbe eintritt (Abb. 71).

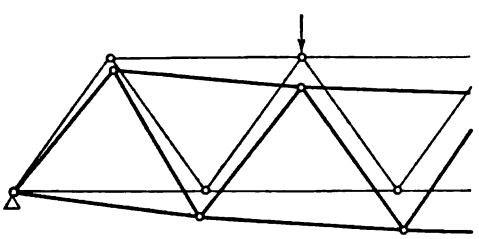


Abb. 71.

[1]) Diesen Konstruktionsgrundsatz berücksichtigt man heute unter anderem auch beim Bau der Wolkenkratzer in den Vereinigten Staaten von Nordamerika, indem man auf Grund ungünstiger Beobachtungen an veralteten Bauten jetzt die Rahmenecken besonders in den unteren Geschossen außerordentlich steif ausbildet.

Nun ist aber in Wirklichkeit eine freie, unbehinderte Drehbarkeit der Knoten wegen der Reibung selbst bei den amerikanischen Bolzengelenkknoten kaum möglich, bei unseren fest vernieteten Knoten aber ganz ausgeschlossen. Es kommen daher zu diesen Stabdehnungen infolge des Zwanges an den Knotenpunkten noch Verbiegungen der Stäbe hinzu (Abb. 72). Die Zug- oder Druckspannungen infolge der Stablängskräfte, die sogenannten Grund- oder Hauptspannungen, werden also noch erhöht durch die Biegungsspannungen infolge der Stabverbiegungen, die sogenannten Nebenspannungen[1]), auf deren Berechnung jedoch bei den üblichen Grundformen in der Regel unbedenklich verzichtet werden kann.

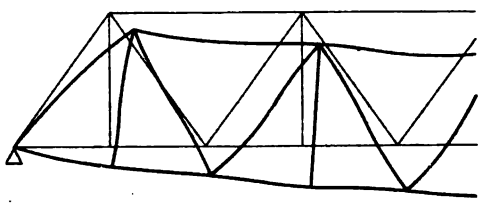


Abb. 72.

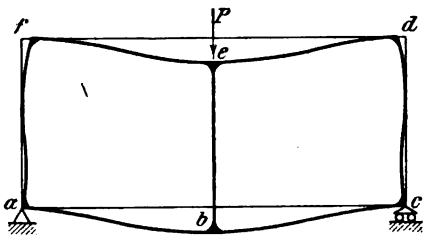


Abb. 73.

Gerade umgekehrt liegen die Verhältnisse bei dem Viereckgefach. Die beiden im unbelasteten Zustande rechteckförmigen Gefache des Pfostenfachwerkträgers der Abb. 73 z. B. gehen bei einer beliebigen Belastung des Trägers in verschobene Vierecke über. Die Belastung im mittleren Obergurtknoten *e* ruft eine Verschiebung desselben hervor und dadurch eine Verbiegung des vorher geradlinigen Obergurtes. Durch den mittleren Pfosten $\overline{be}$, der bei symmetrischer Gestaltung und Belastung des Gefaches gerade bleiben muß, wird die gleiche Formänderung auf den Untergurt übertragen. Da aber infolge der starren Stabverbindung an den vier äußeren Ecken *a*, *c*, *d* und *f* die rechten Winkel ihre Größe nicht ändern können, vielmehr nur gedreht werden, und zwar im Ober- und Untergurt im gleichen Sinne, müssen die beiden Endpfosten *af* und *cd* nach einer doppelt gekrümmten Linie verbogen werden. Infolge des Biegungswiderstandes dieser Pfosten ergibt sich schließlich an den Enden des Ober- und Untergurtes ebenfalls eine doppelte Krümmung.

Zu diesen für die Formänderung hauptsächlich maßgebenden Verbiegungen kommt noch eine unwesentliche Verkürzung oder Verlängerung der Stabachsen infolge der Stablängskräfte hinzu. Im Stabe $\overline{be}$ z. B., der unter der Voraussetzung symmetrischer Gestalt des Fachwerks und symmetrischer Belastung nicht ausbiegen kann, solange seine Knickgrenze nicht erreicht ist, treten nur Stabverkürzungen auf.

Bei dem Pfostenfachwerk entstehen hiernach im Gegensatz zum Dreiecksfachwerk die hauptsächlichen Formänderungen aus der Verbiegung der einzelnen Stäbe, während die Stabdehnungen meist zu vernachlässigen sind. An die Stelle der einfachen Netzfiguren bei gelenkigem Dreiecks-

[1]) Siehe Gehler, Nebenspannungen, Berlin 1910. Verlag von W. Ernst & Sohn.

fachwerk mit verschobenen Knoten treten hier zunächst weniger übersichtliche Figuren, die sich aus den Biegelinien der einzelnen Stäbe zusammensetzen.

B. Biegelinie, Momentenfläche und Eisenverteilung für einfache gerade Stäbe.

Zunächst sei wegen der Frage der Vorzeichen folgendes hervorgehoben.

Die elastische Krümmung eines einzelnen wagerechten Stabes (Abb. 74a) bezeichnen wir dann als positiv (+), wenn der Krümmungsmittelpunkt über der Stabachse liegt. Die Biegungsmomente in einem beliebigen Querschnitt sind dann positiv (+), wenn sie eine positive Krümmung verursachen, also an der Unterseite des Stabes Zugspannung erzeugen. In sinngemäßer Fortführung dieser Gedanken bezeichnen wir schließlich auch die Eiseneinlagen als positive, wenn sie wie bei dem üblichen T-Querschnitt in der positiven Zugachse am unteren Rande liegen (Abb. 74c).

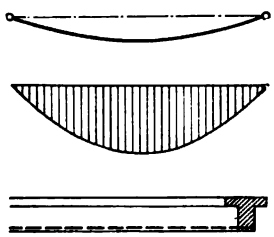


Abb. 74a bis 74c.

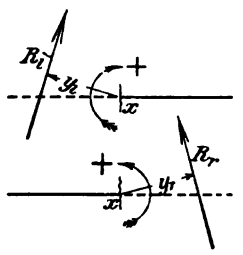


Abb. 75a und 75b.

Bei Rahmen kann die gleiche Bezeichnung beibehalten werden, wenn für die Begriffe „oben und unten" die Begriffe „außen und innen" gesetzt werden.

Die Momentenflächen stellen wir in Uebereinstimmung mit der Form der Biegelinie so dar, daß die positiven Momentenflächen unterhalb der Grundlinie, die negativen Momentenflächen oberhalb der Grundlinie liegen.[1])

Während die Anwendung der einfachen Regel, daß positive Momente und positive Krümmungen an der Innenseite eines Rahmenstabes Zugspannungen erzeugen, keine Schwierigkeiten bietet, bedarf es einer sorgfältigeren Erwägung, wenn für eine auf den Stab wirkende Zug- oder Druckkraft das Vorzeichen der Krümmung und des Biegungsmomentes bestimmt werden soll. Man denke sich nach Abb. 75a den Balken in einem beliebigen Punkt x geschnitten und betrachte den rechts vom Schnittpunkt gelegenen Stabteil für sich, indem man den Stabteil links vom Schnitt durch die Mittelkraft R_l aller auf ihn wirkenden Kräfte ersetzt. Dreht nun die Mittelkraft R_l im Uhrzeigersinn, so nennen wir die von ihr erzeugte Krümmung oder das von ihr ausgeübte Biegungs-

[1]) Diese Darstellungsweise widerspricht zwar der meist üblichen, wonach positive Strecken und Flächen nach oben, negative nach unten aufgetragen werden, bietet aber für unsere Betrachtung zunächst den wesentlichen Vorteil, daß die Lage der Momentenfläche mit der Stabkrümmung übereinstimmt, wodurch die Anschauung erleichtert wird. Ferner wird aber in den meisten Fällen die zeichnerische Darstellung der Momentenlinien bei Rahmen und durchlaufenden Trägern bequemer und übersichtlicher, weil dann der Fall seltener eintritt, daß sich die Momentenflächen überdecken.

moment im Punkte x positiv. Nach Abb. 75b ist das Biegungsmoment auch dann positiv, wenn die Mittelkraft R_r aller rechts vom Schnittpunkt x wirkenden Kräfte entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. In beiden Fällen der Abb. 75a und 75b entstehen infolge dieser positiven Biegungsmomente positive Krümmungen und auf der Unterseite des Balkens Zugspannungen.

Der Zusammenhang zwischen der Formänderung, den Biegungsmomenten und der Anordnung der Eiseneinlagen läßt sich am raschesten an den folgenden einfachen Beispielen erkennen.

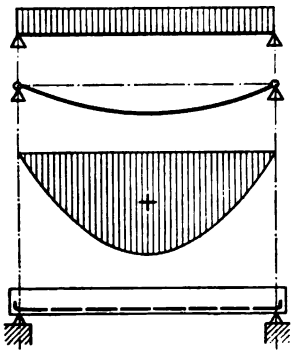


Abb. 76.

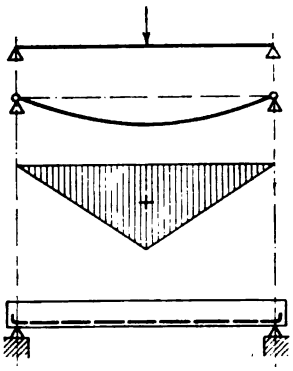


Abb. 77.

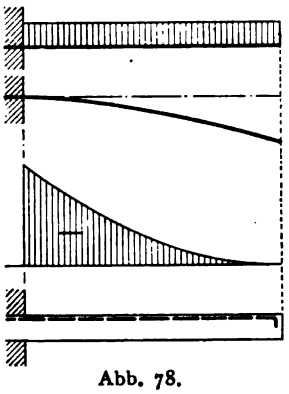


Abb. 78.

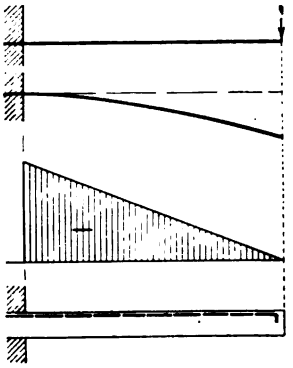


Abb. 79.

a) Wenn die Kräfte senkrecht zur Stabachse wirken, so tritt reine Biegung ohne Längskräfte auf. Der positiven Krümmung des Balkens auf 2 Stützen in Abb. 76 u. 77 entsprechen die positive Momentenfläche und die positiven Eiseneinlagen, ebenso der negativen Krümmung des Kragträgers (Abb. 78 u. 79) die negative Momentenfläche und die negativen Eiseneinlagen. Nach der bekannten Grundgleichung der Biegelinie $\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}$ ist bei gleichbleibender Steifigkeitsziffer EJ die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ stets proportional dem Biegungsmoment M. Sie wird also Null, d. h. der Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$, wenn $M = 0$ ist, also an den freien

Trägerenden. Die Krümmung ist dort am stärksten, der Krümmungshalbmesser also am kleinsten, wo das Moment seinen Größtwert erreicht.

Die Verbindung dieser beiden einfachsten Grundformen ist bekanntlich der beiderseits eingespannte Träger (Abb. 80 u. 81), den man sich aus zwei Kragträgern und einem eingehängten Mittelstück zusammengesetzt denken kann. Die Auflagerkräfte des mittleren Balkenstückes sind als Einzellasten an den Kragträgerenden anzunehmen und bedingen die Abbiegung der Eiseneinlagen an diesen Stellen.

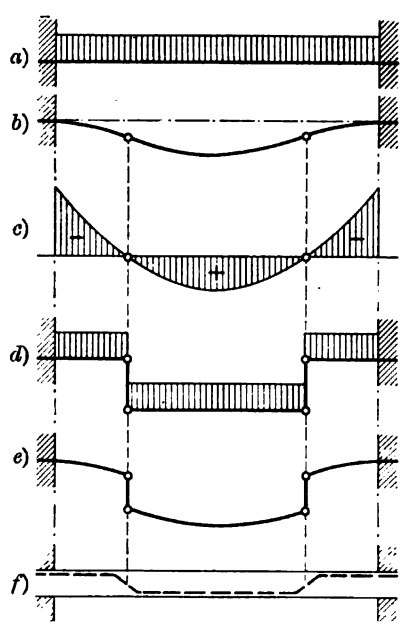


Abb. 80.

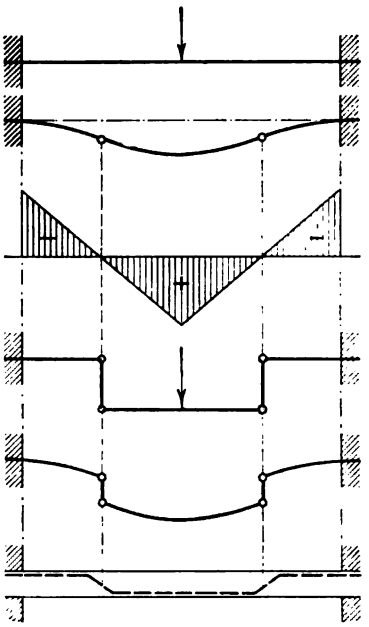


Abb. 81.

Ist die Form der Biegelinie nach Abb. 80b oder 81b gegeben, so erhält man die Momentenfläche (Abb. 80c oder 81c) auf folgende Weise:

Zunächst nehme man die Nullpunkte der Momentenfläche an der Stelle an, wo die Wendepunkte der Biegelinie liegen. Sodann denke man sich die Momentenlinie des einfachen Balkens (Abb. 76 oder 77) von gleicher Stützweite und gleicher Belastung derart verschoben, daß sie die Nullinie in den beiden eingezeichneten Nullpunkten schneidet. Dann entsprechen die mittlere positive Momentenfläche dem positiv gekrümmten Teile und die beiden äußeren negativen Flächen den negativ gekrümmten Teilen der Biegelinie. Die Eiseneinlagen für einen nach Abb. 80a oder 81a belasteten Balken sind dieser Teilung entsprechend im mittleren Teile unten, an den Enden oben angeordnet.

b) Wenn die Kräfte schräg zur Stabachse wirken, so erfolgt außer der Biegung auch eine Längsdehnung infolge der hier auftretenden Längskräfte, deren Einfluß auf die Formänderung jedoch in der Regel vernachlässigt werden kann. Aus der Lage der Kraft zur Stab-

achse möge nun die Verbiegung des Stabes und die zugehörige Momentenfläche bestimmt werden.

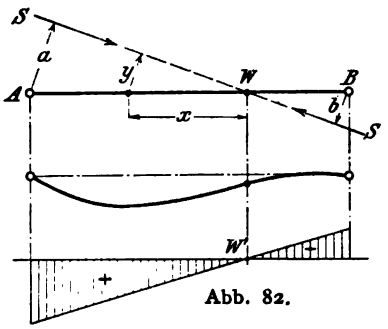


Abb. 82.

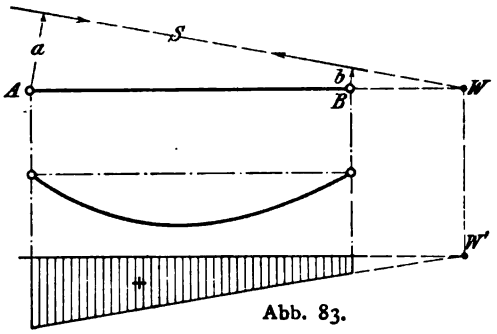


Abb. 83.

In Abb. 82 u. 83 sind die beiden Möglichkeiten unterschieden, daß die Kraft S den Stab innerhalb oder außerhalb der Strecke AB, also in seiner Verlängerung schneidet. Das Biegungsmoment ergibt sich jeweils als Produkt aus der Kraft S und dem Abstande y des betrachteten Stabpunktes von dieser Kraft. Betrachtet man nach der Anleitung zu Abb. 75b den Trägerteil links vom Schnitt x in Abb. 82, so dreht die Kraft S entgegen dem Uhrzeigersinn, die Krümmung wird daher als positiv bezeichnet und ebenso das Biegungsmoment $M_x = +S \cdot y$. Auf der Strecke von A bis zum Schnittpunkt W nimmt der Hebelarm y proportional dem Abstande x vom Punkte W beständig ab, also auch das Biegungsmoment M, bis es im Punkte W, wo $y = 0$ ist, ebenfalls den Wert 0 annimmt. Es ist somit der Punkt W ein Nullpunkt der Momentenlinie und damit ein Wendepunkt der Biegelinie. Auf der Strecke WB endlich übt die Kraft auf den Trägerteil links vom Schnitt eine Verdrehung im Uhrzeigersinn, also eine negative Krümmung und ein negatives Biegungsmoment aus.

Schneidet dagegen die Kraft den Stab erst in seiner Verlängerung, so ist das Vorzeichen der Biegungsmomente für die ganze Stablänge das gleiche, und zwar nach Abb. 83 positiv, da die Kraft auf den Trägerteil links vom Schnitt entgegen dem Uhrzeigersinn drehend wirkt. Entsprechend ist auch die Krümmung auf die ganze Stablänge positiv.

Diese Betrachtung führt zu folgendem Ergebnis:

Schneidet eine Kraft die Stabachse innerhalb der Stablänge, so ist der Schnittpunkt W ein Wendepunkt der S-förmig gekrümmten Biegelinie. Die Momentenfläche hat dann die Gestalt eines sogenannten verschränkten Trapezes. Liegt dagegen der Schnittpunkt W der Kraft mit der Stabachse außerhalb der Stablänge, so ist die Biegelinie nur einfach gekrümmt. Die Momentenfläche nimmt dann die Gestalt eines einfachen Trapezes an, wobei der Schnittpunkt W' der beiden Gegenseiten dem Schnittpunkt W entspricht.

C. Begriff und Bedeutung der Mittelkraftlinie und Mittelkraftfläche.

Unter „Mittelkraftlinie" eines Rahmenstabes möge die Verbindungslinie der Punkte verstanden werden, in denen jeweils die Mittelkraft eines

senkrecht zur Stabrichtung gelegten Schnittes angreift. Die Fläche zwischen dieser Mittelkraftlinie und der Schwerlinie des Rahmenstabes wollen wir mit „Mittelkraftfläche" bezeichnen.

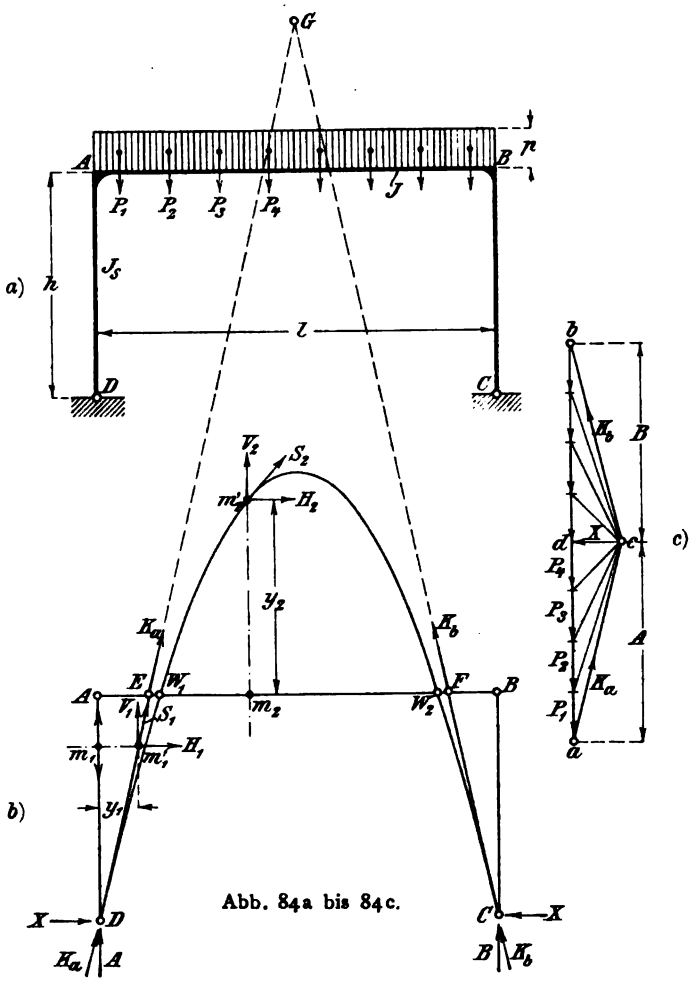


Abb. 84a bis 84c.

Für den Gelenkrahmen der Abb. 84a, auf dessen Balken AB die gleichmäßig verteilte Last p wirkt, möge die Mittelkraftlinie gezeichnet werden. Zunächst sind im Kräfteplan (Abb. 84c) die senkrechten Lasten der einzelnen Belastungsstreifen P_1, P_2, ... als senkrechte Kräfte von Punkt a bis b aufgetragen. Die beiden gleich großen Stützendrücke sind dann $A = B = \frac{\Sigma P}{2} = \overline{ad} = \overline{db}$. Die einzige wagerechte Kraft ist der statisch unbestimmbare Rahmenschub, der sich nach S. 30 zu

$$X = \Sigma \frac{3\,Pab}{2\,lh\,(3 + 2\nu)} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{h}{l}\,\frac{J}{J_s}$$

berechnet und als Strecke $\overline{dc}$ aufzutragen ist. Da nunmehr der Pol c bestimmt ist, kann in Abb. 84b von dem Gelenkpunkt D beginnend die Mittelkraftlinie in bekannter Weise eingezeichnet werden.

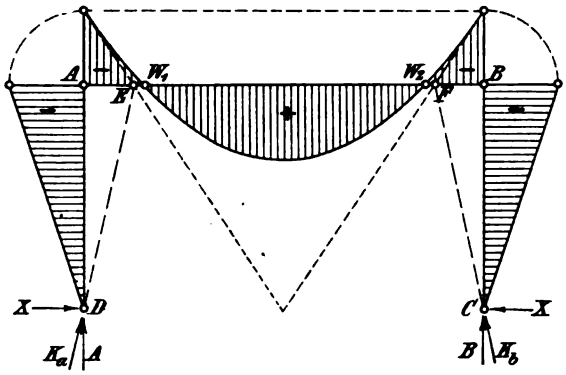


Abb. 85.

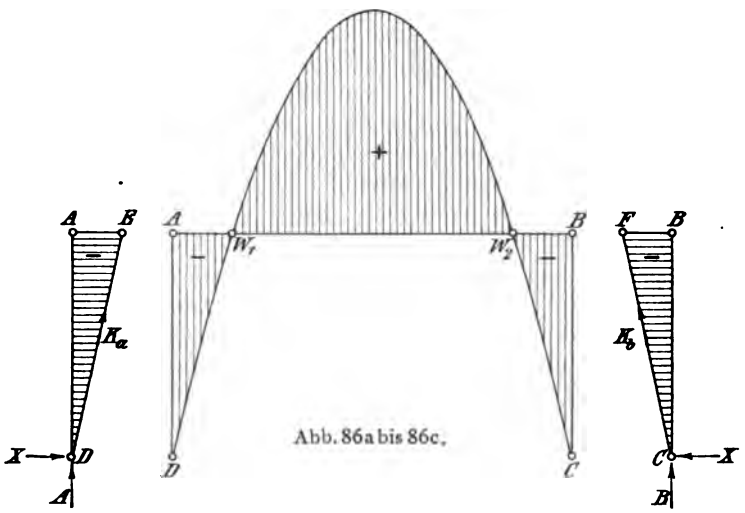


Abb. 86a bis 86c.

Für die gleichmäßig verteilte Belastung ergibt sich dann eine stetige Kurve, und zwar eine Parabel, die die Balkenachse in zwei Punkten W_1 und W_2 schneidet und in den Gelenkpunkten D und C von den beiden Kämpferdrücken K_a und K_b berührt wird (Abb. 84c).

Legt man nun durch einen beliebigen Punkt m_1 des Pfostens DA einen wagerechten Schnitt und betrachtet den oberen Trägerteil rechts vom Schnitt, so wirkt auf diesen nur die eine Kraft K_a, die wir im Punkte m_1' in zwei Seitenkräfte, und zwar in eine Kraft V_1 senkrecht und in eine Kraft H_1 parallel zum Schnitt zerlegen wollen. Die senkrechte Seitenkraft V_1 ist dann nach Abb. 84b gleich dem Stützendruck A und die wagerechte Seitenkraft H_1 gleich dem Rahmenschub X. Bringt man nun-

dadurch, daß man die Ordinaten in A und B in die wagerechte Lage herumklappt und die erhaltenen Punkte mit den Gelenkpunkten C und D verbindet.

Die Kämpferdrücke K_a und K_b sind durch die Geraden DE und CF bestimmt, wenn E und F die Schnittpunkte der Endtangenten an die Parabel mit der Stabachse bedeuten. Der Kräfteplan ergibt sich somit aus Abb. 85 dadurch, daß man zu den Kämpferdrücken, also zu DE und CF die Parallelen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ in Abb. 84c zieht. Hierauf läßt sich die noch fehlende Parabel DW_1W_2C der Abb. 84b einzeichnen.

Wesentlich einfacher wird die Form der Mittelkraftlinie, sobald eine Einzellast vorliegt und nicht eine gleichmäßig verteilte Last, die hier der schärferen und klareren Anschauung halber als allgemeiner Fall betrachtet wurde.

Für den fest eingespannten Rahmen der Abb. 87 mit einer Einzellast P in der Balkenmitte ergibt sich die Mittelkraftlinie in folgender einfachen Weise:

Sind die beiden der Symmetrie wegen gleichen Eckmomente nach S. 40 ermittelt, so trägt man diese Werte in Abb. 87c ein, ebenso von $A'B'$ aus $M_{max}=\frac{Pl}{4}$, wodurch die Momentenfläche und ebenso die vier Wendepunkte W_1 bis W_4 bestimmt sind. Verbindet man W_1 mit W_2 und W_3 mit W_4, so hat man die Lage der Kämpferdrücke K_a und K_b gefunden. Der Kräfteplan ergibt sich dann dadurch, daß man in Abb. 87b die Linie $\overline{ac} \parallel W_1W_2$ und $\overline{bc} \parallel W_3W_4$ zieht, wodurch der Pol c und somit auch $\overline{cd}=X$ bestimmt ist. Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Man hat nun in Abb. 87a nicht nur die Stützendrücke nach Lage und Größe gefunden, sondern kann auch ohne weiteres für jeden Rahmenpunkt die Querkraft und Längskraft angeben.

Nur der Anschaulichkeit halber sind diese Kräftezerlegungen, die man sofort in Abb. 87c vornehmen kann, in einer besonderen Abb. 87a eingezeichnet. Die Kämpferdrücke gehen hier nicht durch die Punkte C und D, wie beim Gelenkrahmen (Abb. 84b), sondern greifen jeweils an einem Hebelarm $CC'=y_C$ und $DD'=y_D$ an, so daß die Momente in C und D nicht gleich Null, sondern

$$M_C=+\overline{CC'}\cdot N_C=+y_C\cdot B$$

$$\text{und } M_D=+\overline{DD'}\cdot N_D=+y_D\cdot A$$

sind. Die Längskräfte sind dabei $N_C=B$ und $N_D=A$, also gleich den Stützendrücken (Abb. 87b).

Die Mittelkraftlinien für die drei Stäbe sind in Abb. 87d bis 87f herausgezeichnet, woraus man sieht, daß sie sich jeweils für die beiden Stäbe DA und AB auf die Strecke $\overline{W_1W_2}$ bezw. für BC und AB auf die Strecke $\overline{W_3W_4}$ decken.

Legt man in Abb. 87a durch einen Punkt m_1' auf K_a zwei Schnitte senkrecht zu DA und AB, die dieselben in m_1 und m_2 schneiden, so erhält man für Punkt m_1 (vergl. auch Abb. 87d u. 87e)

$$M_1 = -A \cdot y_1,$$
$$Q_1 = X,$$
$$N_1 = A$$

und für Punkt m_2

$$M_2 = -X \cdot y_2,$$
$$Q_2 = A,$$
$$N_2 = X.$$

D. Anwendungsbeispiele für die Mittelkraftlinie.

1. Gelenkrahmen mit senkrechter Belastung.

Die Kraft R (Abb. 88a) sei die Mittelkraft einer Reihe von senkrechten Einzelkräften P_1, P_2, die auf den Balken AB eines dreiseitigen Gelenkrahmens wirken.

Zur Ermittlung der Biegungsmomente wird zunächst nach Gleichung 1) S. 30 (vergl. auch die Zusammenstellung am Schlusse) der Einspannungsgrad $\mu_A = \mu_B = -\frac{3}{2\alpha_1}$ berechnet, wobei $\alpha_1 = 3 + 2\nu$ und $\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s}$ ist. Daraus ergeben sich die Eckmomente

$$M_A = M_B = \mu \cdot (\mathfrak{M}'_{max} + \mathfrak{M}''_{max}).$$

Hierin bedeuten die Ausdrücke

$$\mathfrak{M}'_{max} = \frac{P_1 a' b'}{l} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}''_{max} = \frac{P_2 a'' b''}{l}$$

die Biegungsmomente unter der Last P_1 und P_2, wenn jede derselben allein auf einen einfachen Balken von der gleichen Stützweite l wirkt. Nun trage man nach Abb. 88f die Eckmomente M_A und M_B unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens in A und B auf und setze an die so erhaltene Schlußlinie die Momentenfläche des mit beiden Kräften belasteten Balkens an. Die Verlängerungen der äußersten Seiten des Seilzuges schneiden sich auf der Mittelkraft R und treffen die Stabachse in den Punkten E' und H (vergl. 88f u. a). Die Nullpunkte E und H der Momentenlinie sind gleichzeitig die Wendepunkte der Biegelinie. Durch Herumklappen der Momentenstrecken M_A und M_B in die Wagerechte ergibt sich die Momentenfläche der beiden Pfosten, die in den Gelenkpunkten D und C ihre Nullpunkte hat.

Trägt man nun nach Abb. 88b die beiden Kräfte P_1 und P_2 auf und zieht von den Endpunkten der Kraftstrecke ba die Parallelen zu den Verbindungslinien DE' und CH, die sich im Punkte c schneiden, so ist damit der Kräfteplan gefunden. In diesem sind die Strecken ac und bc die beiden Kämpferdrücke, die Strecke dc, ihre wagerechte Seitenkraft, der wagerechte Rahmenschub X, der im allgemeinen als statisch unbestimmbare Größe eingeführt und unmittelbar berechnet wird. Wie beim Kräfteplan eines einfachen Balkens ergeben sich durch die Parallele dc zur Schlußlinie DC, der Verbindungslinie der beiden Gelenkpunkte der Abb. 88a, die den lotrechten Stützkräften A und B entsprechenden Kraftstrecken ad und db im Kräfteplan (Abb. 88b). Aus diesem Kräfteplan erhält man ohne weiteres

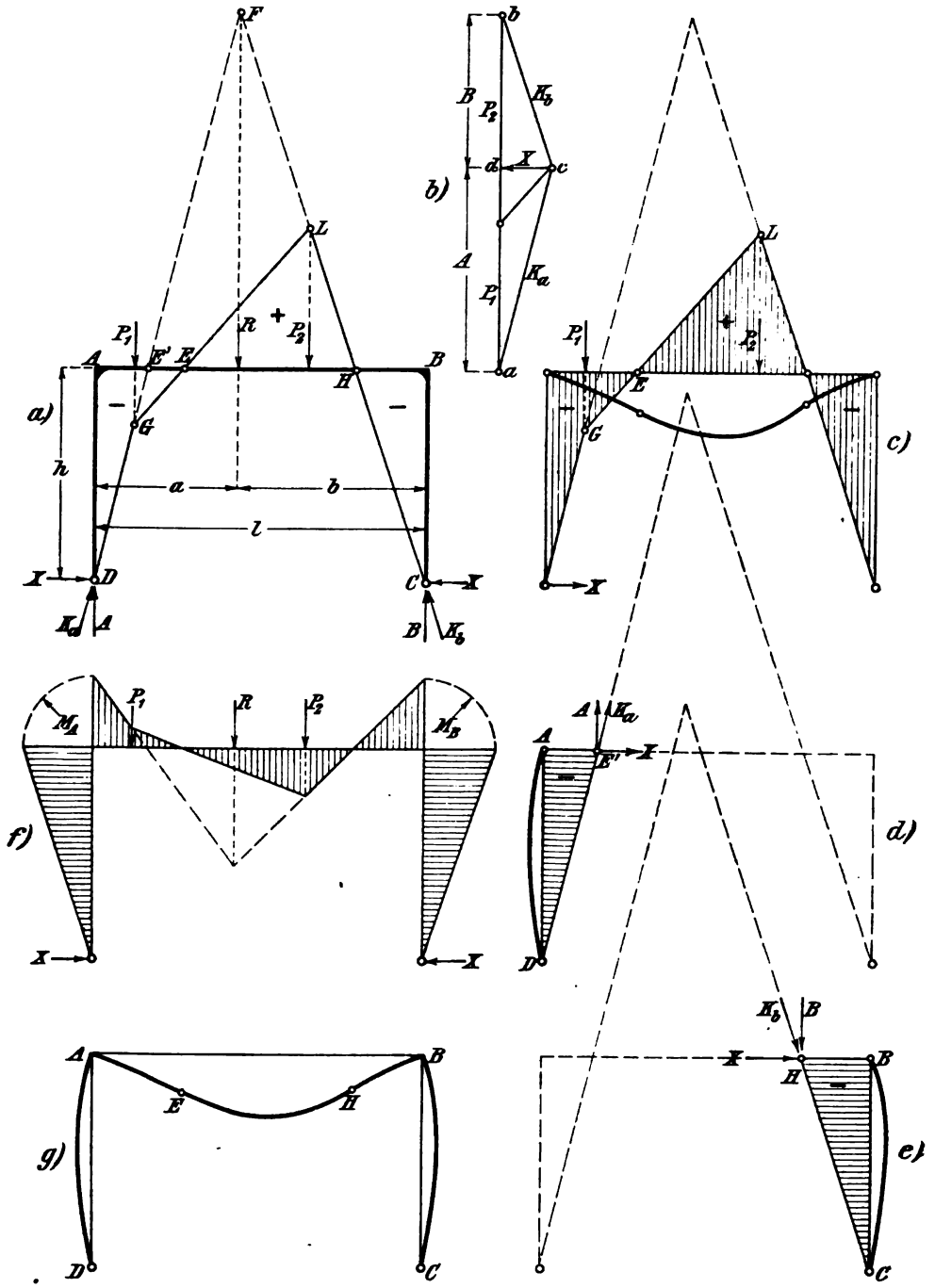


Abb. 88a bis 88g.

die Mittelkraftlinie der Abb. 88a dadurch, daß man von D aus beginnend, die Seiten des Seilzuges $DGLC$ parallel zu den entsprechenden Strecken im Kräfteplan zieht. Die Schnittpunkte E', E und H decken sich dann mit den Schnittpunkten der Abb. 88f.

In Abb. 88a bis 88e sind die Mittelkraftflächen für jeden Rahmenstab nochmals herausgezeichnet und die zugehörigen Biegelinien eingetragen nach den auf S. 64 gegebenen Anleitungen. Die Zusammenstellung dieser Biegelinien in Abb. 88g zeigt das gesamte Formänderungsbild des Rahmens, aus dem die Uebereinstimmung des Krümmungssinnes mit den Vorzeichen der Momentenflächen und Mittelkraftflächen zu ersehen ist. Die Verbindungslinien der Momentennullpunkte DE und CH begrenzen jeweils den Bereich des positiven und negativen Vorzeichens. Da die Strecken DE und CH infolge der Belastung des Rahmens verkürzt werden (s. Abb. 88g), sollen die entsprechenden Ecken bei A und B als „Druckecken" bezeichnet werden. Aus dieser Verkürzung, die man, ohne die Formänderung aufzuskizzieren, allein schon aus der senkrechten Belastung des Rahmens nach dem Gefühle folgern kann, ist daher ein sicherer Schluß auf das negative Vorzeichen der Krümmungen und der Momente an diesen Ecken zu ziehen.

2. Gelenkrahmen mit wagerechter Belastung.

Der Pfosten DA des Rahmens sei durch mehrere wagerechte Kräfte W_1, W_2, W_3 belastet, deren Mittelkraft W ist (Abb. 89b).

In gleicher Weise wie vorher berechnet man wieder die Einspannungsgrade μ und zwar hier nach Gleichung 4a) und 4b) (s. S. 33 oder die Zusammenstellung am Schlusse), wonach

$$\mu_A = -\frac{3+\nu(1+\eta^2)}{2\alpha_1} \quad \text{und} \quad \mu_B = +\frac{3+\nu(3-\eta^2)}{2\alpha_1}$$

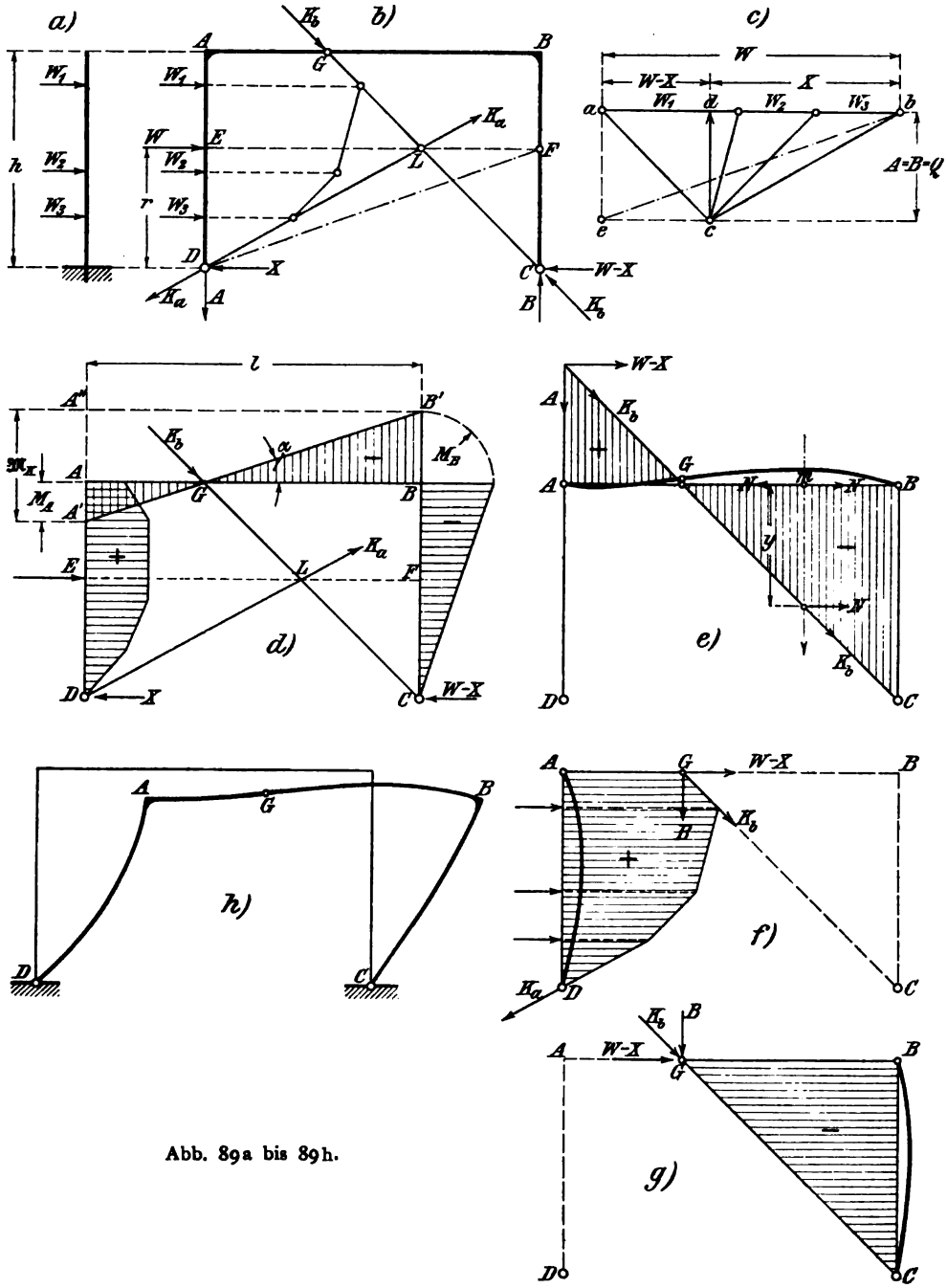
mit $\alpha_1 = 3+2\nu$ und $\nu = \frac{h}{l}\cdot\frac{J}{J_s}$. Damit ergeben sich die Eckmomente zu $M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_K$ und $M_B = \mu_B \cdot \mathfrak{M}_K$, wenn $\mathfrak{M}_K$ das Einspannungsmoment am Fuße des statisch bestimmten Kragträgers der Abb. 89a bedeutet.

Nach Abb. 89d sind sodann die Eckmomente unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens aufzutragen und die Momentenlinien einzuzeichnen, wodurch sich der einzige Wendepunkt G im Balken AB ergibt. (Zur Ermittlung dieses Wendepunktes genügte natürlich die Auftragung der Momentenlinie $A'B'$ allein.) Die Verbindungslinie des Wendepunktes G mit dem rechten Gelenkpunkt C ist die Richtung des rechten Kämpferdruckes K_b, während der linke Kämpferdruck K_a durch den Schnittpunkt L der Linie GC mit der wagerechten Mittelkraft W bestimmt ist.

Den Kräfteplan der Abb. 89c erhält man nunmehr dadurch, daß von den Endpunkten a und b der wagerechten Kraft W Parallele zu K_a und K_b gezogen werden, die sich im Punkte c schneiden.

Um die Mittelkraftlinie der Abb. 89b zu zeichnen, zieht man, vom Punkte D ausgehend, die Parallelen zu den entsprechenden Strahlen des Kräfteplanes. Aus Abb. 89b u. 89c ergeben sich durch Zerlegung der

beiden Kämpferdrücke K_a und K_b die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten lotrechten Auflagerkräfte A und B sowie die wagerechten Seiten-



kräfte X und $(W-X)$. Während man die Kräfte A und B einfacher auch dadurch finden kann, daß man im Kräfteplan be parallel zu DF zieht, wird die statisch unbestimmbare Größe X im allgemeinen unmittelbar berechnet, da sie sich hier ohne weiteres im Kräfteplan ergibt.

In Abb. 89e bis 89g sind wieder die Mittelkraftflächen der drei Rahmenstäbe herausgezeichnet, aus denen die Querkräfte und Längskräfte für jeden Stabquerschnitt bestimmt werden können. So ergibt sich z. B. für den Punkt m der Abb. 89e die für den ganzen Stab AB gleichbleibende Querkraft Q_{AB} als Strecke de im Kräfteplan und die im Balken wirkende Längskraft N als Strecke $ad = W - X$. Das Biegungsmoment im Punkte m ergibt sich dann als Produkt aus der Längskraft und der Ordinate y, also $M_m = -N \cdot y = -(W-X) \cdot y$.

Aus den in Abb. 89e bis 89g eingezeichneten Biegelinien ist das Gesamtbild der Formänderung (Abb. 89h) zusammengestellt. Da die Strecke DG infolge der von links her wirkenden Kräfte sich verlängert, die Strecke GC sich aber entsprechend verkürzt, trennt GD mit der Ecke A den positiven, GC mit der Ecke B den negativen Bereich der Momente und Krümmungen ab.

Die Grundgleichung IIa') (vergl. S. 53)

$$M_A - M_B = -\mathfrak{M}_K$$

besagt, daß die Summe der Streckengrößen AA' und BB' in Abb. 89d gleich dem Einspannungsmoment des Kragträgers in Abb. 89a sein muß. Diese Beziehung läßt sich auch unmittelbar aus Abb. 89d herleiten, weil bekanntlich die Querkraft gleich dem Differentialquotienten oder gleich dem Richtungsfaktor der Momentenlinie ist, also

$$\operatorname{tg}\alpha = Q_{AB} = \frac{A'A''}{l},$$

während sich aus Abb. 89b u. 89c

$$Q_{AB} = +B = +\frac{Wr}{l} = -\frac{\mathfrak{M}_K}{l},$$

also $A'A'' = -\mathfrak{M}_K$ ergibt.

8. Eingespannter Rahmen mit senkrechter Belastung.

Auf den dreiseitigen eingespannten Rahmen $DABC$ (Abb. 90a) wirke die senkrechte Einzellast P.

Auch hier wird zunächst der Einspannungsgrad μ berechnet und zwar nach Gleichung 8a bis 8d (s. S. 39 und Zusammenstellung am Schlusse), wonach

$$\left\{\begin{aligned}
\mu_A &= -\frac{1}{\alpha_2} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \cdot \frac{1}{\beta_2} \\
\mu_B &= -\frac{1}{\alpha_2} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \cdot \frac{1}{\beta_2} \\
\mu_C &= +\frac{1}{2\alpha_2} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \cdot \frac{1}{\beta_2} \\
\mu_D &= +\frac{1}{2\alpha_2} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \cdot \frac{1}{\beta_2}
\end{aligned}\right.$$

mit $$\alpha_2 = 2 + \nu,\ \beta_2 = 1 + 6\nu,\ \nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{a}{l}$$

ist. Damit ergeben sich die vier Eckmomente $M = \mu \cdot \mathfrak{M}_{max}$, wenn nach Abb. 90d $\mathfrak{M}_{max}$ das Biegungsmoment des frei gestützten Balkens $A'B'$ unter der Einzellast bedeutet. Die Auftragung der Eckmomente nach Abb. 90c ergibt in diesem Falle vier Wendepunkte E, F, G und L. Die Verbindungslinien derselben bestimmen die Kämpferdrücke K_a und K_b sowie den schrägen Schub H'.

Zieht man im Kräfteplan (Abb. 90b) von den Endpunkten a und b der Last P Parallele zu EF und GL und durch den so erhaltenen Schnittpunkt c eine weitere Parallele ce zu EL, so ist der Kräfteplan vollendet. Um die Stützkräfte zu finden, zerlege man die Kämpferdrücke K_a im Punkte D' und K_b im Punkte C' in ihre senkrechten und wagerechten Seitenkräfte. Aus den Dreiecken cda und cdb des Kräfteplans ergibt sich, daß die wagerechte Seitenkraft X für beide Kämpferdrücke gleich groß ist, während die senkrechten Seitenkräfte A' und B' die Stützendrücke des einfachen Balkens der Abb. 90d sind. Im Gegensatz hierzu ergibt die Zerlegung der Kräfte K_a und K_b in den Wendepunkten E und L, wie aus den Dreiecken cea und ceb zu ersehen ist, den schräg gerichteten Schub H' und die beiden senkrechten Seitenkräfte $A = A' - Y$ und $B = B' + Y$, welche die in den Stützpunkten D und C des Rahmens wirklich auftretenden lotrechten Stützkräfte sind. Wie aus dem Dreieck dce des Kräfteplans hervorgeht, sind X und Y die Seitenkräfte des schrägen Schubes H'.

Vergleicht man den Wert

$$X = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{max}}{h} \cdot \frac{1}{2 + \nu}$$

für den wagerechten Schub des eingespannten Rahmens (vergl. S. 38) mit dem entsprechenden Wert

$$X = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{max}}{h} \cdot \frac{1}{3 + 2\nu}$$

des Gelenkrahmens (vergl. S. 30), so sieht man, daß sich dieselben wie $(3 + 2\nu) : (2 + \nu)$ verhalten, daß also der Schub des Gelenkrahmens unter sonst gleichen Verhältnissen stets der kleinere Wert ist. Zu demselben Ergebnis führt auch schon die Ueberlegung, daß beim Gelenkrahmen die Kämpferdrücke durch die beiden Fußpunkte gehen, während beim festen Rahmen die Kämpferdrücke die Pfosten in den Punkten E und L schneiden, also flacher geneigt sind (vergl. Abb. 90a mit Abb. 88a).

Betrachtet man dagegen die lotrechten Stützendrücke, so findet man, daß beim festen Rahmen der der Einzellast näher liegende und daher stärker belastete Pfosten mit dem Stützendruck $A = A' - Y$ um den Betrag der statisch unbestimmbaren Kraft Y entlastet, der andere Pfosten mit dem Stützendruck $B = B' + Y$ aber um den gleichen Betrag mehr belastet ist als die Stützen des einfachen Balkens der Abb. 90d. Diese Betrachtung führt zu dem bekannten Ergebnis, daß die Erhöhung der statischen Unbestimmtheit eines Tragwerks auf die Stabkräfte in ausgleichendem Sinne wirkt.

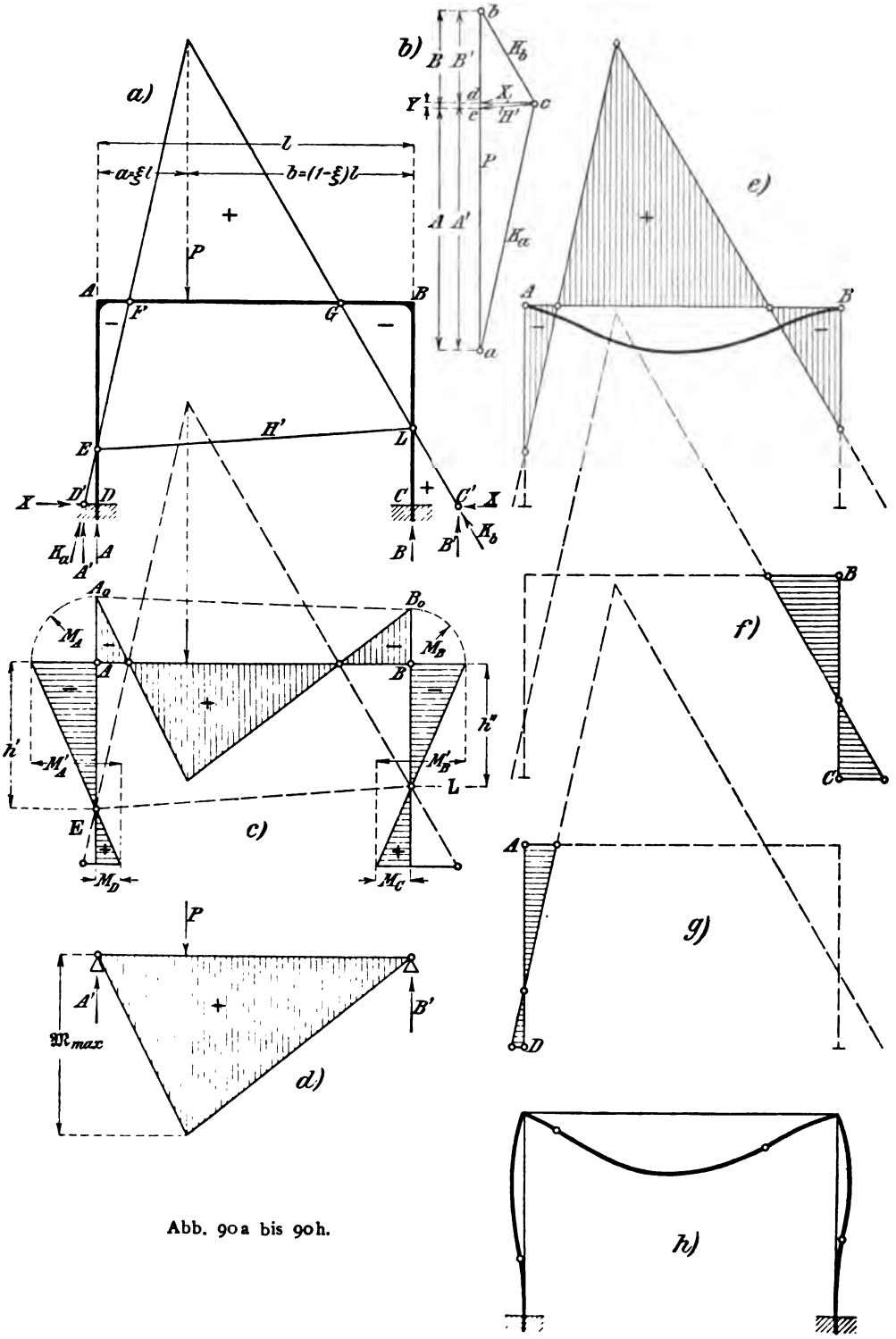


Abb. 90a bis 90h.

Stellt man nach Abb. 90a die Momentengleichungen in bezug auf die vier Rahmenecken auf, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l} M_D = + \overline{DD'} \cdot A' \\ M_A = + \overline{DD'} \cdot A' - Xh \\ M_B = + \overline{CC'} \cdot B' - Xh \\ M_C = + \overline{CC'} \cdot B'. \end{array}\right.$$

Hieraus folgt, wenn mit M_A' und M_B' die absolute Summe der beiden Eckmomente je eines Pfostens bezeichnet wird (Abb. 90c)

$$\left\{\begin{array}{l} M_A' = M_A - M_D = - Xh \\ M_B' = M_B - M_C = - Xh. \end{array}\right.$$

Die Momente M_A' und M_B' entsprechen den Eckmomenten des Gelenkrahmens, sie sind aber nicht etwa ebenso groß wie die Eckmomente in dem Falle, daß bei D und C Gelenke vorhanden wären, da die Größen X in beiden Fällen verschieden sind. Diese Beziehung läßt sich auch in der Form der Grundgleichung Ib' (S. 53)

$$(M_A - M_D) - (M_B - M_C) = 0$$

schreiben, die wir als die Grundgleichung des dreiseitigen festen Rahmens mit senkrechter Belastung bezeichnet hatten.

Ferner ergibt sich die Höhe $AE = h'$ und $BL = h''$ des Pfostenteiles über den beiden Wendepunkten (Abb. 90c) aus

$$\frac{h'}{h} = \frac{M_A}{M_A - M_D} \quad \text{und} \quad \frac{h''}{h} = \frac{M_B}{M_B - M_C}.$$

Da aber $M_A - M_D = M_B - M_C$ ist, so wird

$$\frac{h'}{h''} = \frac{M_A}{M_B}.$$

Es müssen sich also in Abb. 90c die Geraden $\overline{A_0 B_0}$ und $\overline{EL}$ in ihrer Verlängerung auf $\overline{AB}$ schneiden, was auch aus der Aehnlichkeit der Dreiecke über EA_0 und LB_0 hervorgeht.

4. Vierseitiger Rahmen mit wagerechter Kraft in der oberen Rahmenecke.

Auf den vierseitigen Rahmen $ABCD$ möge nach Abb. 91a in der Ecke A eine wagerechte Kraft W wirken.

Die Einspannungsgrade berechnen sich nach Gleichung 18) (S. 52 und Zusammenstellung am Schlusse) zu

$$\left.\begin{array}{l} \mu_A = - \dfrac{3\nu + \omega}{2\beta_3} = - \mu_B \\ \mu_C = - \dfrac{3\nu + 1}{2\beta_3} = - \mu_D \end{array}\right\}$$

und daraus die Eckmomente $M = \mu \cdot \mathfrak{M}_K$, wobei $\beta_3 = 6\nu + 1 + \omega$, $\nu = \dfrac{h}{l} \cdot \dfrac{J_0}{J_s}$, $\omega = \dfrac{J_0}{J_u}$ und das Einspannungsmoment des Kragträgers $\mathfrak{M}_K = - Wh$ ist. Trägt man die Eckmomente nach Abb. 91c auf, so ergeben sich die vier Wendepunkte W_1, W_2, W_3, W_4.

Den Kräfteplan der Abb. 91b erhält man dadurch, daß man durch die Endpunkte *a* und *c* der Kraftstrecke *W* Parallele zu den vier Verbindungslinien der Wendepunkte der Abb. 91c zieht.

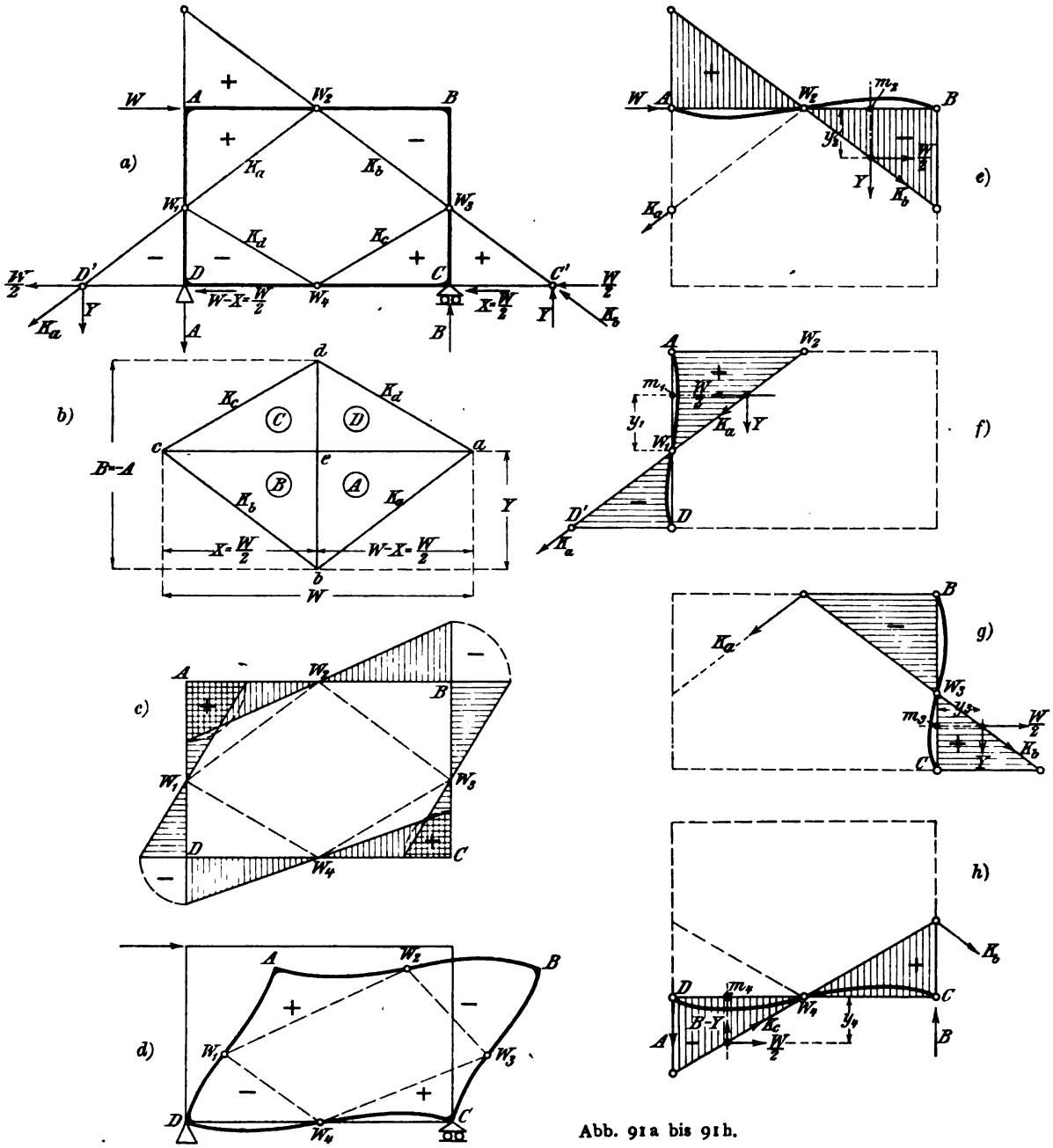


Abb. 91a bis 91h.

In Abb. 91a sind die Mittelkraftlinien und Stützkräfte des Rahmens dargestellt und zur besseren Uebersicht in Abb. 91e bis 91h für die einzelnen Stäbe besonders herausgezeichnet. Da dieses Beispiel von den bisher behandelten durch die Hinzufügung des vierten Rahmenstabes und die statisch bestimmte Stützung des Viereckesgefaches abweicht, sei auf diese Kräftezerlegung etwas näher eingegangen.

Der vierseitige Rahmen $ABCD$ ist bei D auf einem Gelenklager, bei C auf einem Rollenlager gestützt, also äußerlich statisch bestimmt gelagert. Am unverschieblichen Gelenklager D wird außer der senkrechten Stützkraft A der gesamte wagerechte Schub W aufgenommen, am beweglichen Lager wirkt dagegen nur die senkrechte Kraft $B = -A$. Aus den Momentengleichungen für den Punkt C und D ergibt sich $B = \frac{Wh}{l} = -A$. Die Stützkraft A ist somit eine Zugkraft, B dagegen eine Druckkraft. Zum Unterschied von den bisherigen Beispielen sind also hier die Stützkräfte sämtlich statisch bestimmt.

Von diesen äußeren Kräften sind die inneren Kräfte zu unterscheiden. Da der Rahmen in bezug auf die senkrechte Mittellinie vollkommen symmetrisch ist, liegen die Wendepunkte W_2 und W_4 in dieser Symmetrieachse und die Wendepunkte W_1 und W_3 in gleicher Höhe. Der Kräfteplan der Abb. 91b ist daher ebenfalls symmetrisch zur Senkrechten bd, woraus sich ergibt, daß die wagerechten Seitenkräfte von K_a und K_b sowie von K_c und K_d die Größe $\frac{W}{2}$ haben müssen, die übrigens nach S. 52 die erste statisch unbestimmbare Größe X der Aufgabe ist.

Die senkrechte Seitenkraft be, die wir zunächst mit N bezeichnen wollen, ergibt sich nun nach Abb. 91a, da $M_D = -N \cdot \overline{DD'}$ ist, zu $N = +\frac{3\nu+1}{2\beta_3} \cdot \frac{Wh}{\overline{DD'}}$. Aus den Mittelkraftflächen (Abb. 91a) erhält man aber $\overline{DD'} = \overline{AW_2} \cdot \frac{M_D}{M_A} = -\frac{l}{2} \cdot \frac{3\nu+1}{3\nu+\omega}$, folglich $N = -\frac{3\nu+\omega}{\beta_3} \cdot \frac{Wh}{l} = Y$, also nach S. 52 den Wert der zweiten statisch unbestimmbaren Größe der Aufgabe. Die Strecke bd des Kräfteplanes dagegen ist die Summe der senkrechten Seitenkräfte von K_a und K_d sowie von K_b und K_c, also gleich dem Stützendruck des Rahmens $B = -A$. Auf die geometrisch bemerkenswerten reziproken Beziehungen der Punkte und Dreiecke in den beiden Abb. 91a u. 91b, die durch umringelte Buchstaben A bis D angedeutet sind, sei besonders hingewiesen.

Das Biegungsmoment, die Querkraft und die Längskraft für einen beliebigen Punkt m_1 des Stabes DA ergeben sich aus Abb. 91f folgendermaßen:

Denken wir uns durch den Punkt m_1 einen wagerechten Schnitt gelegt und betrachten den oberhalb des Schnittes gelegenen rechten Trägerteil $\overline{m_1 A}$, so wirkt auf diesen K_a als Zugkraft mit den beiden Seitenkräften $\frac{W}{2}$ und Y. Da Y auf diesen Trägerteil eine Verdrehung im

Uhrzeigersinn ausübt, also auf der Innenseite des Pfostens Zugspannungen hervorruft, so ist das in dem Schnitt m_1 wirkende Biegungsmoment $M_1 = Y \cdot y_1$ und ebenso die Krümmung des Stabes an dieser Stelle positiv (vergl. S. 58). Ferner wirken auf den Schnitt die Querkraft $Q_1 = \frac{W}{2}$ und die Längskraft $N_1 = + Y$, und zwar diese als Zugkraft.

Nach Abb. 91e wirkt auf den Schnitt im Punkt m_2 des Stabes AB die Mittelkraft der Kräfte links vom Schnitt, d. i. die Kraft K_b als Mittelkraft der beiden Kräfte K_a und W. Diese Kraft K_b ist folglich im Sinne von c nach b (Abb. 91b) gerichtet, also für den Balken AB eine Druckkraft. Sie verbiegt den Stab derart, daß im Schnitt m_2 an der Innenseite Druck entsteht, also mit negativer Krümmung. Dann ist

$$M_2 = -\frac{W}{2} \cdot y_2, \quad \text{ferner } Q_2 = Y \quad \text{und} \quad N_2 = -\frac{W}{2}.$$

Für den Punkt m_3 des Stabes BC ist wiederum im Sinne des Fortschreitens in der Richtung D, A, B, C der untere Teil als rechter Trägerteil zu betrachten (Abb. 91g.) Da keine neue äußere Kraft hinzukommt, bleibt die Druckkraft K_b die einzige auf ihn wirkende Kraft und ergibt eine positive Krümmung mit Zug an der Innenseite, also $M_3 = + Y \cdot y_3$, ferner $Q_3 = \frac{W}{2}$ und $N_3 = - Y$.

Für einen Schnitt durch Punkt m_4 des Stabes DC (Abb. 91h) endlich ist der Teil $\overline{m_4 D}$ hier umgekehrt, also von oben her zu betrachten. Auf diesen Schnitt wirken die Kräfte K_a und W oder deren Mittelkraft K_b in der Richtung cb (Abb. 91b), außerdem aber noch am Punkt C der Stützendruck $B = bd$. Somit ergibt sich im Kräfteplan als Mittelkraft von K_b und B die Kraft K_c in der Richtung cd, also eine Zugkraft. Das Biegungsmoment dreht derart, daß eine negative Krümmung mit Druckspannungen an der Innenseite entsteht. Folglich ist $M_4 = -\frac{W}{2} y_4$, ferner $Q_4 = B - Y$ und $N_4 = + \frac{W}{2}$.

Als Probe zeigt sich, daß das Vorzeichen sämtlicher Mittelkraftflächen der Abb. 91e bis 91h mit der Momentenfläche der Abb. 91c übereinstimmt.

In Abb. 91e bis 91h sind wiederum auch die Biegelinien der einzelnen Stäbe eingezeichnet und in Abb. 91d zu einem gesamten Formänderungsbild zusammengestellt. Durch die Verbindungslinien der vier Wendepunkte wird jeweils der positive und negative Bereich der Krümmungen und Biegungsmomente scharf begrenzt. Schon aus der Betrachtung der Verschiebung des Rechtecks $ABCD$ in das Parallelogramm und der daraus sich ergebenden Verlängerung der Strecke $W_1 W_2$ erkennt man, daß bei A eine Zugecke mit positivem Vorzeichen entstehen muß, ebenso wie bei C, daß dagegen bei B und D Druckecken mit negativen Vorzeichen auftreten werden.

Erwähnt sei noch, daß die spitz oder stumpf erscheinenden Ecken in den Eckpunkten des Rahmens immer in Wirklichkeit rechte Winkel

sind, wenn auch nur auf eine unendlich kleine Länge eines jeden Schenkels (vergl. S. 57).

Bildet man die Summe der Streckengrößen für die Eckmomente nach Abb. 91c mit Benutzung der Werte für den Einspannungsgrad μ von S. 51, also

$$M_A + M_B + M_C + M_D = \frac{Wh}{2\beta_3}[2(3\nu+\omega)+2(3\nu+1)]$$

$$= \frac{Wh}{\beta_3}(6\nu+1+\omega) = Wh = -\mathfrak{M}_K,$$

da $\beta_3 = 6\nu+1+\omega$ ist, so erhält man wiederum die Grundgleichung IIb' (vergl. S. 54), nach welcher die absolute Summe aller Eckmomente gleich dem Einspannungsmoment des Kragträgers ist.

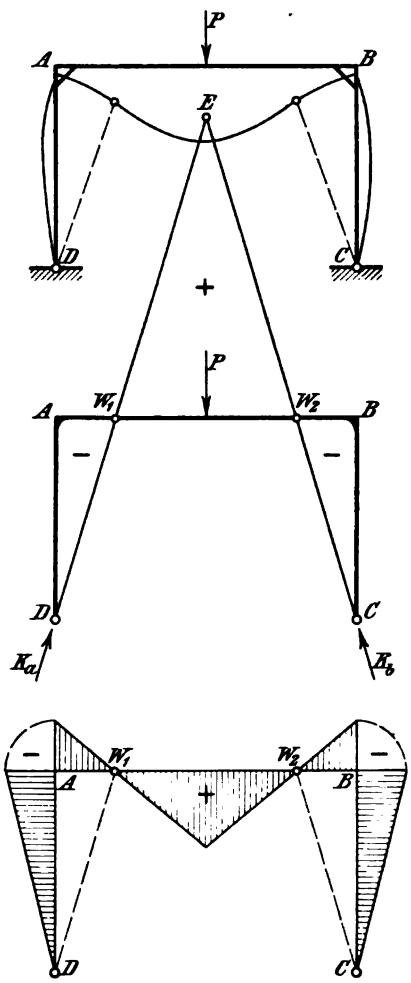


Abb. 92.

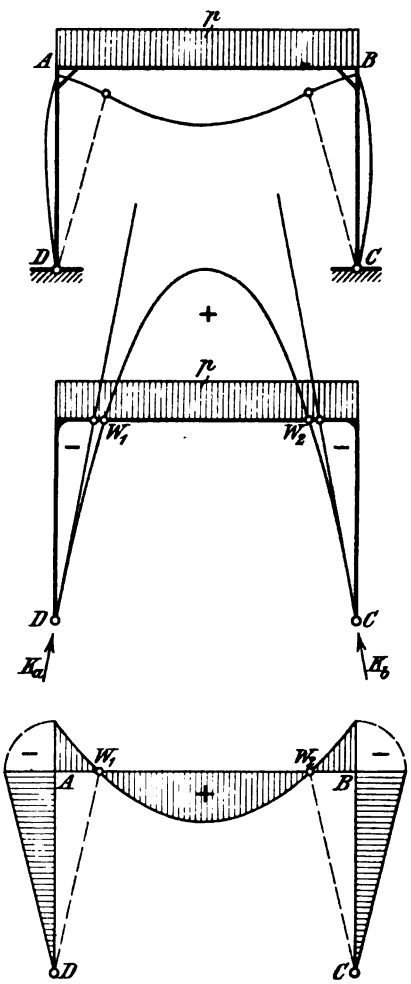


Abb. 93.

E. Aufskizzieren der Formänderung und der Momentenverteilung.

Auf Grund der soeben erörterten Beziehungen zwischen der Mittelkraftlinie, der Mittelkraftfläche, der Momentenlinie und der Biegelinie eines jeden Rahmenstabes sind wir nunmehr in der Lage, für einen Rahmen auch ohne vorhergehende Berechnung die Formänderung und die Momentenverteilung rasch aufzuskizzieren.

1. Beim dreiseitigen Gelenkrahmen (Abb. 92 bis 95) sind die beiden Fußgelenkpunkte stets zwei Schnittpunkte der Mittelkraftlinie.

Die senkrechte Einzellast P der Abb. 92 wird ähnlich wie bei einem Sprengwerk in den Linien der beiden Kämpferdrücke K_a und K_b nach den beiden Gelenkpunkten D und C übertragen. Diese beiden Kräfte schneiden die Balkenachse AB in zwei Punkten W_1 und W_2, die gleichzeitig Nullpunkte der Momentenlinie und Wendepunkte der Biegelinie sind. Sie begrenzen den Bereich der positiven und der negativen

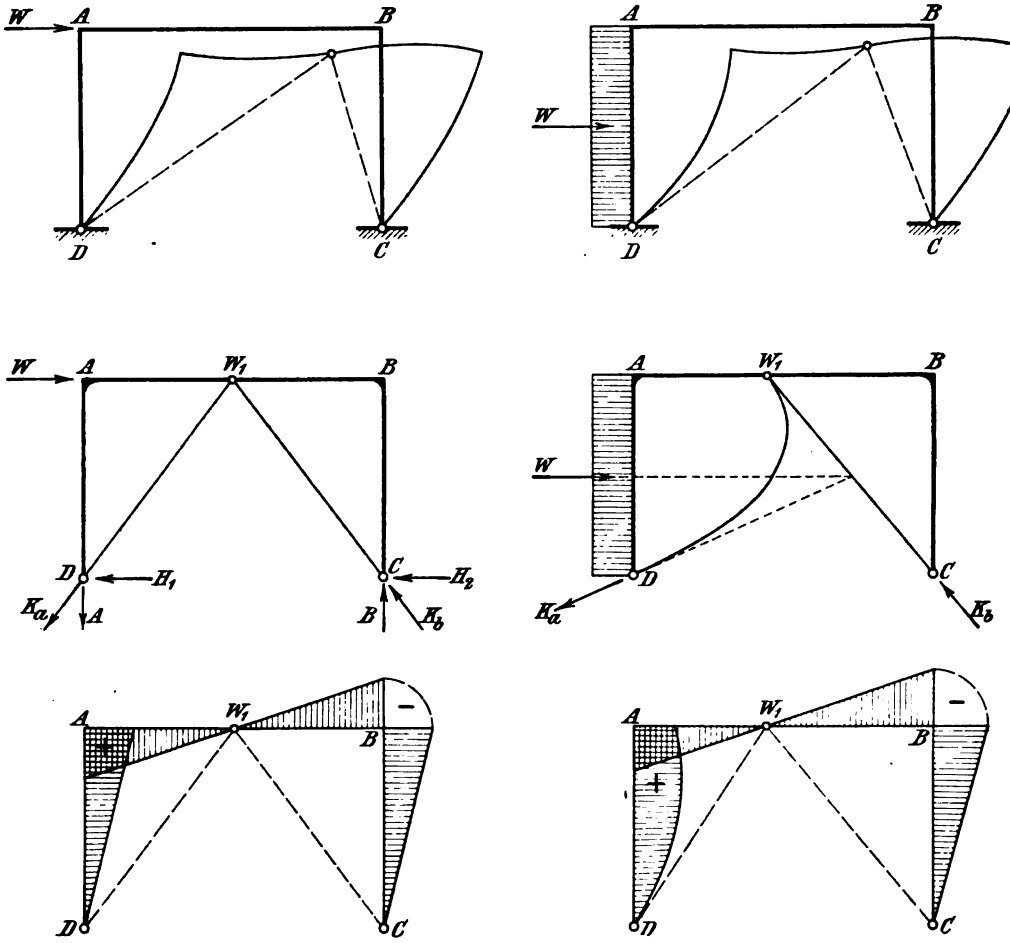


Abb. 94.

Abb. 95.

Vorzeichen sowohl der Momente wie der Krümmungen. Während diese Vorzeichen unter der Last positiv sind, da an der Innenseite des Balkens innerhalb der Strecke $W_1 W_2$ Zugspannungen entstehen, sind die Biegungsmomente und Krümmungen der übrigen Rahmenstrecken negativ. Da die Punkte W_1 und W_2 sich infolge der Belastung P senken müssen (Abb. 92a), die Strecken $W_1 D$ und $W_2 C$ also verkürzt werden, sind die entsprechenden Ecken bei A und B als Druckecken zu bezeichnen, woraus ebenfalls auf das negative Vorzeichen derselben zu schließen ist.

Bei der senkrechten gleichmäßig verteilten Belastung des Balkens AB (Abb. 93) tritt als Mittelkraftlinie des Balkens an Stelle des Dreiecks DEC der Abb. 92 die Parabel, welche die Balkenachse in den

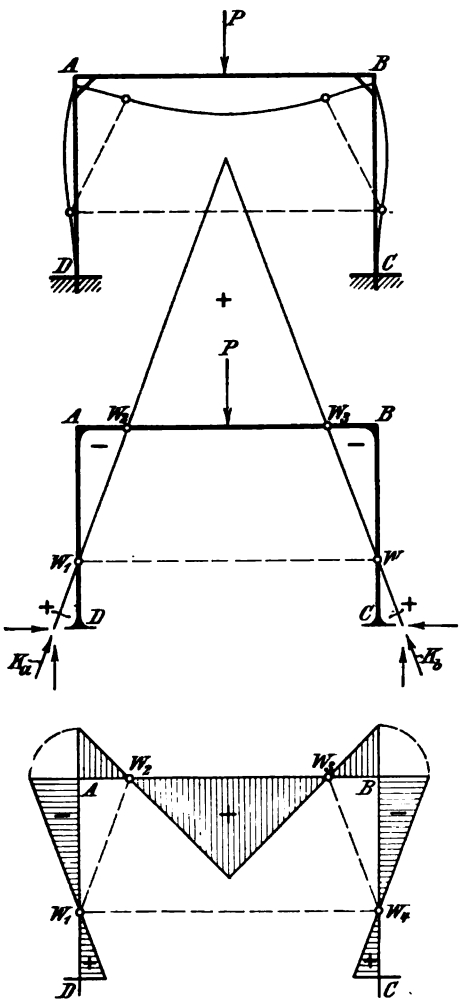


Abb. 96.

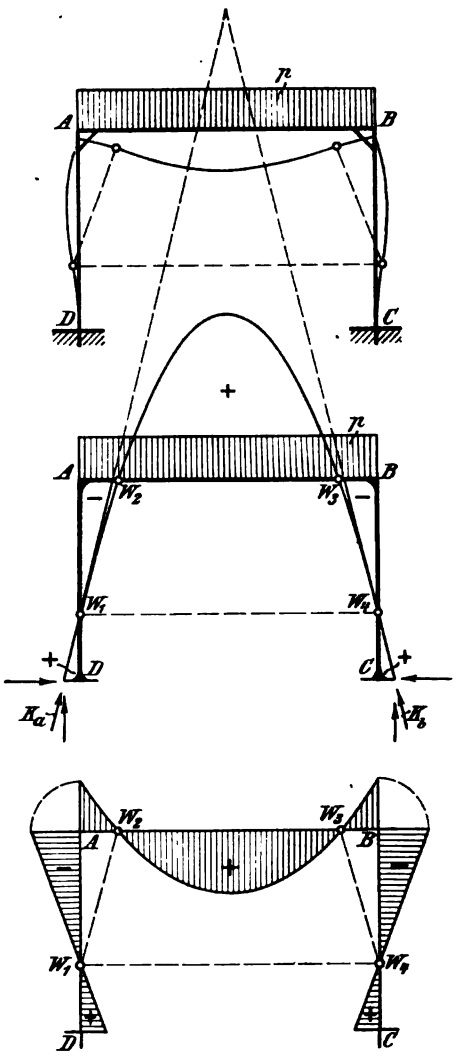
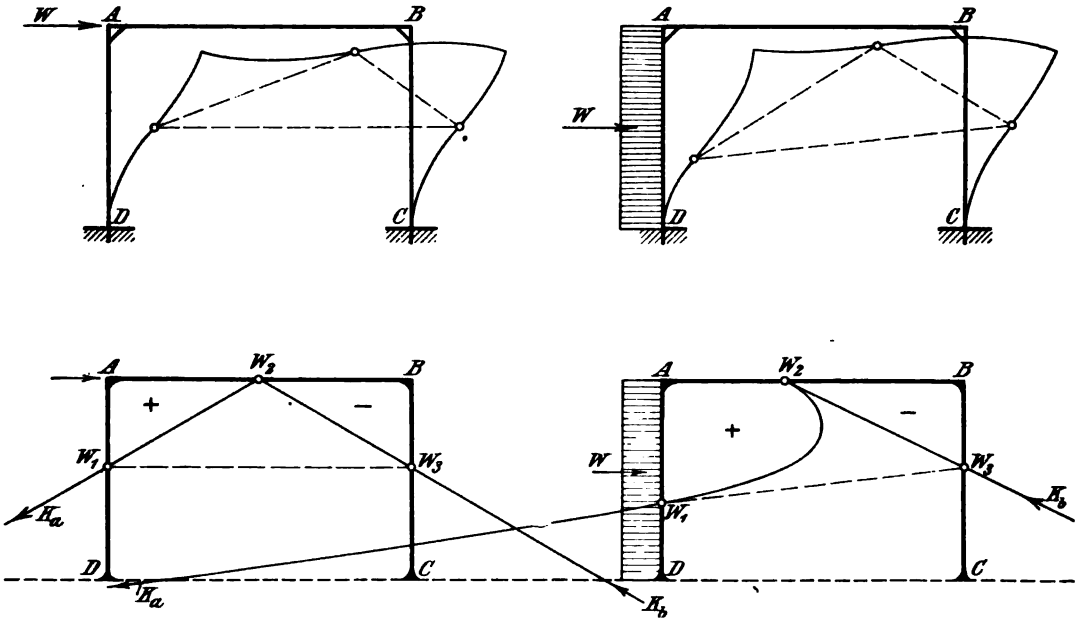


Abb. 97.

beiden Wendepunkten W_1 und W_2 schneidet. Die Tangenten an die Parabel in C und D, die beiden Kämpferdrücke K_a und K_b, sind die Mittelkraftlinien der beiden unbelasteten Pfosten. Im übrigen sind die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei Abb. 92 (vergl. auch Abb. 84, S. 62).

Die wagerechte Kraft W (Abb. 94) in der oberen Rahmenecke A hat das Bestreben, ein Kippen des Rahmens um den Punkt C herbeizuführen, so daß also auf C eine Druckkraft, auf D dagegen eine Zugkraft ausgeübt wird. An den Gelenklagern C und D werden die beiden Schubkräfte H_1 und H_2 erzeugt, ferner der Stützendruck B und die senkrechte Zugkraft A. Aus diesen Seitenkräften ergeben sich als Mittelkräfte der Kämpferdruck K_b und der Kämpferzug K_a. Da hier beide Pfosten offenbar zu gleichen Anteilen das Drehmoment übernehmen müssen, welches die wagerechte Kraft auf den als Kragträger zu betrachtenden symmetrischen Rahmen ausübt, kann man hier auch ohne die Berechnung



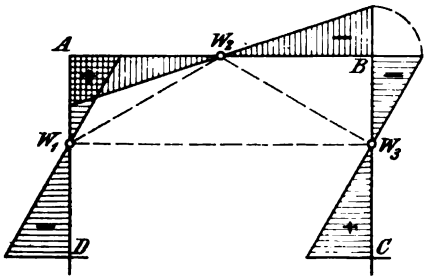


Abb. 98.

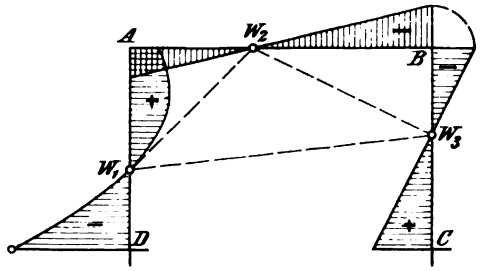


Abb. 99.

der Elastizitätslehre schließen, daß die Schubkräfte $H_1 = H_2 = \frac{W}{2}$ sind. Hieraus ergibt sich, daß die beiden Kräfte K_1 und K_2 die gleiche wagerechte Seitenkraft haben und sich in der Symmetrieachse schneiden müssen. Der Schnittpunkt W_1 der drei äußeren Kräfte W, K_a und K_b muß dann in der Mitte des Balkens AB liegen. Es ergibt sich somit hier außer den Gelenkpunkten C und D nur ein einziger Wendepunkt W_1.

Auf den dreiseitigen Rahmen kann übrigens der bekannte Satz, der für den Bogen gilt, ohne weiteres übertragen werden, daß nämlich die Schwerlinie von der Mittelkraftlinie bei unsymmetrischer Belastung

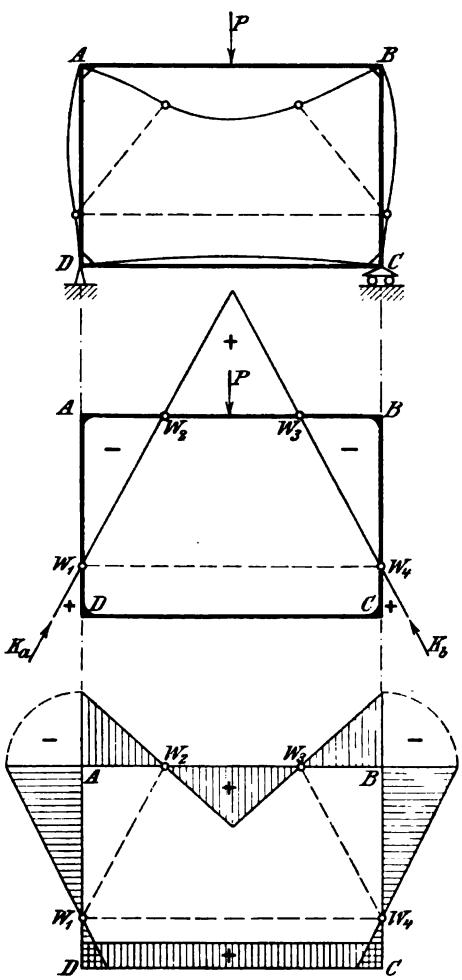


Abb. 100.

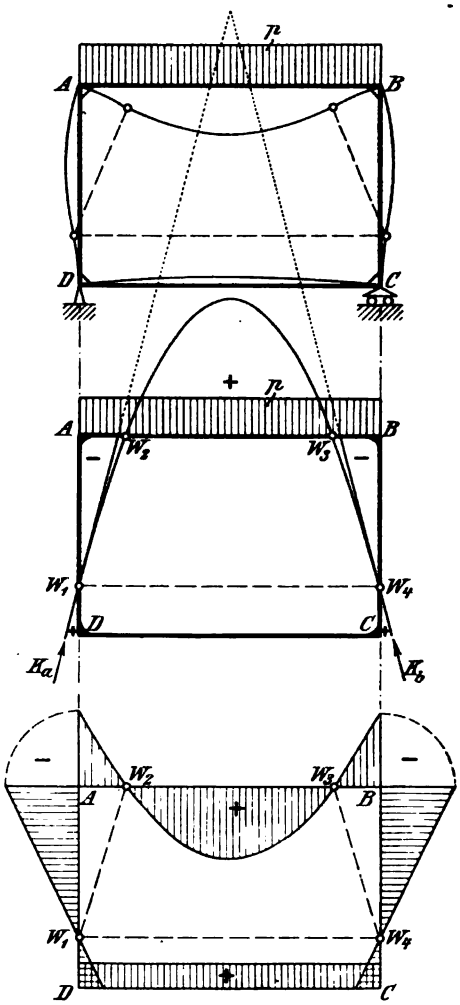


Abb. 101.

mindestens dreimal, bei symmetrischer Belastung mindestens viermal geschnitten werden muß. In diesem Falle der einseitigen wagerechten Belastung sind drei Schnittpunkte vorhanden, während bei Abb. 92 u. 93 im Falle der symmetrischen Belastung sich vier Schnittpunkte ergeben.

In Abb. 94 erkennt man nach diesen Ueberlegungen ohne Schwierigkeiten die Zugecke bei *A* mit den positiven Krümmungen, den Zugspannungen an der Innenseite und den positiven Momenten, ferner die Druckecke bei *B* mit den negativen Krümmungen, den Druckspannungen an der Innenseite und den negativen Momenten.

Sind die wagerechten Kräfte gleichmäßig über den Pfosten *DA* verteilt wie in Abb. 95, so ist eine unsymmetrische Belastung beider

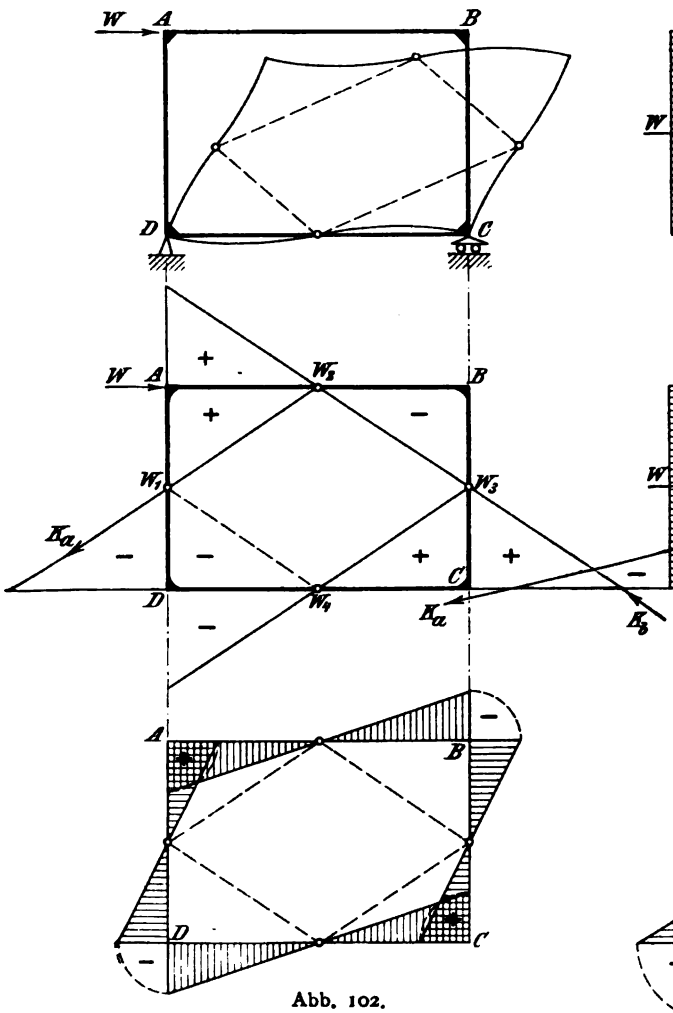


Abb. 102.

Abb. 103.

Pfosten vorhanden, also auch eine ungleiche Verbiegung derselben. Die Kräfte K_a und K_b müssen sich hier mit der Mittelkraft W in halber Höhe des Rahmens schneiden. Im übrigen sind die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei Abb. 94.

2. Beim dreiseitigen eingespannten Rahmen tritt an Stelle der Gelenkpunkte C und D des Gelenkrahmens je ein neuer Wendepunkt in den beiden Pfosten. Im übrigen lassen sich die beim Gelenkrahmen angestellten Erörterungen auch hier ohne weiteres vornehmen.

Bei der Einzellast in der Mitte (Abb. 96) und der senkrechten gleichmäßig verteilten Belastung (Abb. 97) sind die Verhältnisse ganz ähnlich wie beim Gelenkrahmen (Abb. 92 u. 93). Nur ist hervorzuheben, daß die Endtangente an die Biegelinie bei C und D nicht, wie dort, frei drehbar ist, sondern infolge der festen Einspannung in senkrechter Lage bleibt. Die Ecken an diesen Punkten C und D sind hier als Zugecken mit Zugspannungen an der Innenseite, positiven Krümmungen und positiven Momenten zu betrachten. Auch hier ist durch die Verbindungslinien der Wendepunkte W_1, W_2 und W_3, W_4 der Bereich der positiven und negativen Momente klar geschieden.

Die Belastungsfälle mit wagerechten Kräften (Abb. 98 u. 99) entsprechen vollständig denen des Gelenkrahmens (Abb. 94 u. 95). Auch hier tritt der Einfluß der festen Einspannung deutlich hervor.

3. Bei dem vierseitigen Rahmen (Abb. 100 bis 103) sei besonders darauf hingewiesen, daß derselbe bei D und C statisch bestimmt gestützt ist. Zu den äußeren senkrechten Lasten oder den wagerechten Kräften kommen somit als weitere äußere Kräfte noch die senkrechten Stützendrücke A und B sowie bei wagerechter Belastung noch ein Schub W hinzu, der vom Gelenklager allein aufzunehmen ist. Im Gegensatz zu diesen äußeren Kräften sind die Kräfte K_a, K_b, K_c und K_d hier als innere Kräfte zu bezeichnen (vergl. Abb. 91, S. 75).

Durch die Verbindungslinien der vier Wendepunkte ist der positive und negative Bereich jeweils getrennt. Alle Vorzeichen bestimmen sich am einfachsten aus der Unterscheidung von Druckecken und Zugecken. Bei den senkrechten Belastungen des Balkens AB (Abb. 100 u. 101) sind C und D Zugecken. In dem unteren Stabe CD kann kein Wendepunkt eintreten, sondern nur eine einfache Krümmung, weil auf denselben weder äußere Kräfte noch eine Mittelkraft, sondern nur die beiden Kragmomente bei C und D wirken.

Wir kommen somit zu dem Ergebnis, daß mit Hilfe des Begriffes der Wendepunkte und der Mittelkraftlinien man wohl in der Lage ist, ohne jegliche Rechnung die Formänderung und die Momentenverteilung der Rahmen ohne weiteres aufzuskizzieren, wobei sich die Vorzeichen in einfachster Weise durch die Unterscheidung von Druckecken und Zugecken bestimmen, deren Bereich jeweils durch die Verbindungslinien der Wendepunkte begrenzt ist.

F. Aufzeichnen der Verbiegungen der Rahmenstäbe.

1. Die Beziehungen zwischen den Knotendrehwinkeln, den Stabdrehwinkeln und den Tangentenwinkeln eines Rahmens.

Betrachtet man die Formänderung der dreiseitigen und vierseitigen Rahmen (Abb. 104 bis 107), so ist zunächst die Verschiebung der Rahmenecken von der Verbiegung der Rahmenstäbe zu unterscheiden.

Da wie bisher bei unseren Erörterungen die Längenänderungen der Stäbe vernachlässigt werden, geht bei wagerechter Belastung das Rechteck $ABCD$ des Stabnetzes in ein Parallelogramm $A'B'CD$ über. Dabei dreht sich die Stabsehne des Pfostens DA um den Winkel ψ aus der senkrechten Lage in die Richtung DA'. Diesen Winkel, der nach Abb. 104 bis 106 an allen vier Ecken des Parallelogramms auftritt, wollen wir als den Stabdrehwinkel des Rahmens bezeichnen.[1])

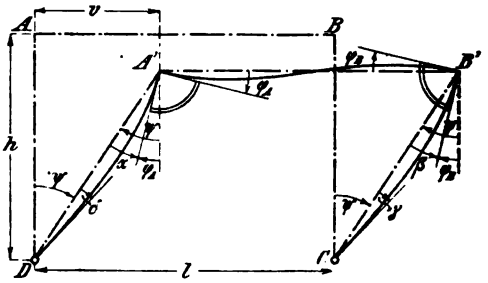


Abb. 104.

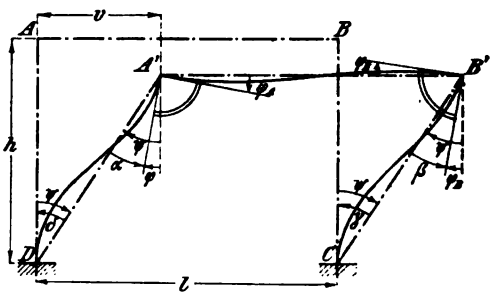


Abb. 105.

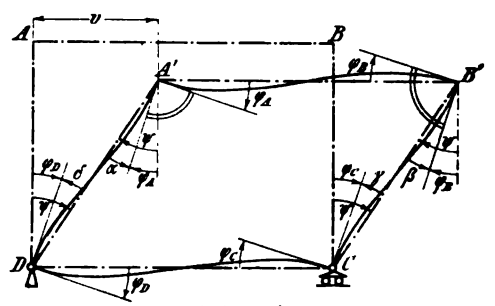


Abb. 106.

Da die Stäbe jedoch in den Rahmenecken nicht gelenkig, sondern starr verbunden sind, müssen die rechten Winkel in den Eckpunkten erhalten bleiben. Daher erfolgt die Verschiebung des rechteckigen Stabnetzes in die Form des Parallelogramms $A'B'CD$ nicht zwanglos unter Erhaltung der geradlinigen Stabform, sondern es müssen vielmehr gewisse Verbiegungen der Stäbe eintreten, die durch die Endtangenten der Biegelinien der einzelnen Stäbe gekennzeichnet sind. Hierbei drehen sich die rechten Winkel an den Knoten bei A' bezw. B' aus der wagerechten Lage der Stabsehne in die Richtung der Endtangenten der Biegelinie um die Winkel φ_A bezw. φ_B, die wir als Knotendrehwinkel der Ecken A und B bezeichnen wollen. Beim vierseitigen Rahmen (Abb. 106) treten

[1]) Vergl. Gehler, Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken (Berlin 1910, Verlag von Wilh. Ernst & Sohn), S. 14.

für die Ecken C und D zwei weitere entsprechende Knotendrehwinkel φ_C und φ_D hinzu.

Endlich werden noch die Winkel zwischen der Stabsehne des Pfostens DA' und den Endtangenten seiner Biegelinie in den Punkten A' und D als die Tangentenwinkel α und δ des Pfostens bezeichnet und in entsprechender Weise die Tangentenwinkel des rechten Pfostens bei B' und C mit β und γ. Die Tangentenwinkel des Balkens AB bei A' und B' decken sich mit den Knotendrehwinkeln φ_A und φ_B.

Aus Abb. 104 u. 105 ergeben sich zwischen diesen Winkeln die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\psi - \alpha &= \varphi_A\\ \psi - \beta &= \varphi_B\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

die wir als die Grundgleichung der Rahmenwinkel des dreiseitigen Rahmens bezeichnen. Während beim Gelenkrahmen in den Punkten C und D eine zwanglose Verdrehung des Pfostens um den Winkel ψ stattfinden kann, muß beim eingespannten Rahmen (Abb. 105) die Endtangente in den Punkten D und C senkrecht bleiben, also die Bedingung $\psi = \delta = \gamma$ erfüllt sein.

Aus Abb. 106 erhält man in gleicher Weise für den vierseitigen Rahmen die Grundgleichung

$$\left.\begin{aligned}\psi - \alpha &= \varphi_A\\ \psi - \beta &= \varphi_B\\ \psi - \gamma &= \varphi_C\\ \psi - \delta &= \varphi_D\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

Nimmt man die Steifigkeit des unteren Rahmenstabes CD unendlich groß an, so geht der vierseitige Rahmen in den eingespannten Rahmen der Abb. 105 über. Man erhält dann die Bedingung $\varphi_D = \varphi_C = 0$, also wiederum $\psi = \delta = \gamma$.

Die wagerechte Verschiebung v der Punkte A und B ergibt sich nach Abb. 104 bis 106 zu

$$v = h \cdot \sin \psi = \text{rd.}\, h \cdot \operatorname{tg} \psi \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

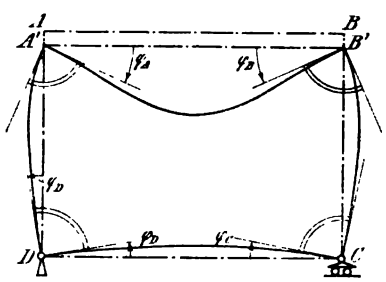


Abb. 107.

Bei senkrechter Belastung des Balkens AB (Abb. 107) tritt unter Vernachlässigung der Längsdehnungen der Rahmenstäbe nur eine senkrechte Verschiebung der Punkte A und B nach A' und B' ein. Es wird daher der Stabdrehwinkel $\psi = 0$, so daß jedesmal die Tangentenwinkel α, β, γ und δ den Knotendrehwinkeln in den entsprechenden Rahmenecken gleich sein müssen.

Beim Aufskizzieren der Formänderung wird häufig **der Fehler** begangen, daß einer der Knotendrehwinkel φ größer als der Stabdrehwinkel ψ des Rahmens angenommen wird. Unter Beibehaltung des rechten Winkels wird dann die Endtangente der Biegelinie bei A über die Stabsehne $A'D$ hinaus gedreht und dadurch ein falsches Vorzeichen

der Krümmung, der Biegungsmomente und der Spannungen erhalten. Ein solcher Fehler, der bei Eisenbetonbauten dazu führen könnte, daß die Zugeisen auf der falschen Seite des Pfostens eingelegt werden, ist wohl am besten durch die im vorigen Abschnitt (S. 77 u. 79) gegebenen Regeln über den Bereich der Vorzeichen zu vermeiden.

2. Die Biegelinie eines Rahmenstabes.

Um die Biegelinie eines einzelnen Rahmenstabes aufzeichnen zu können, mögen hierfür im folgenden noch einige Anleitungen gegeben werden. Der Verlauf der Biegelinie eines Stabes läßt sich am raschesten durch die beiden Endtangenten und die Ordinate in der Stabmitte bestimmen (Abb. 108). Diese drei Werte sind in der Uebersicht auf

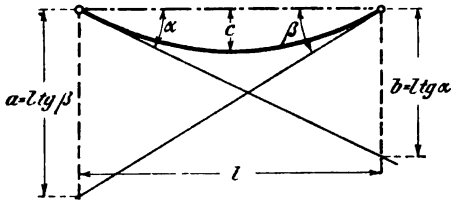


Abb. 108.

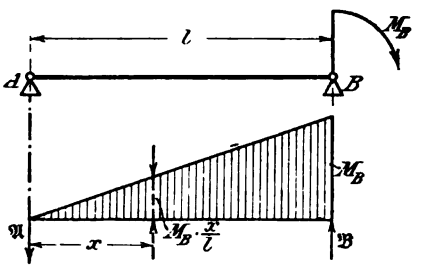


Abb. 109.

S. 88 für die wichtigsten vorkommenden Belastungsfälle, die in der ersten Zeile angedeutet sind, zusammengestellt. Die vier ersten Fälle, in welchen auf die Enden eines Stabes AB Einspannungsmomente M_A und M_B, ferner lotrechte Belastungen wirken, sind jeweils für den wagerechten Balken anzuwenden. Die vier letzten Fälle dagegen, in welchen ein durch wagerechte Kräfte belasteter, senkrecht stehender Kragträger behandelt ist, gelten für die Pfosten. In der zweiten Zeile sind die diesen Belastungen entsprechenden Biegungsmomente, in der dritten Zeile die zugehörigen Biegelinien dargestellt. Die Herleitung und Anwendung der drei Werte a, b und c (vergl. Abb. 108), die zur Aufzeichnung der Biegelinie zu benutzen sind, soll in folgendem Beispiel noch kurz erörtert werden.

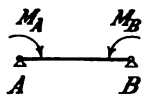
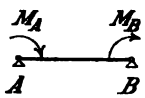
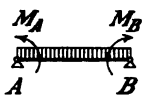
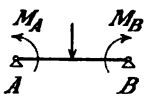
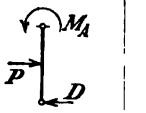
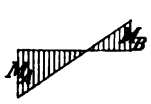
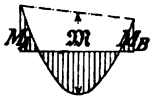
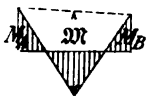
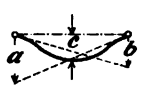
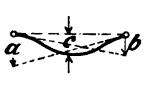
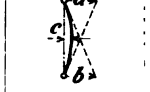
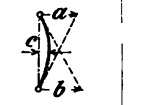
Für den einfachen Balken AB (Abb. 109), an dessen einem Ende B das Einspannungsmoment M_B angreift, ist die Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe M_B und der Grundlinie l. Die Biegelinie des Balkens erhält man nach Mohr dadurch, daß diese Momentenfläche als Belastungsfläche angesehen und dafür ein Seileck mit dem Polabstand $H = EJ$ gezeichnet wird. Die Ordinaten dieses Seilecks sind dann die gesuchten Durchbiegungen. Auf rechnerischem Wege ergibt sich hiernach für die Belastung mit der Momentenfläche der linke Stützendruck

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{3} M_B \cdot \frac{l}{2} = \frac{M_B \cdot l}{6},$$

das Biegungsmoment im Abstande x von A zu

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{A} \cdot x - \frac{M_B \cdot x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{M_B \cdot x}{6\,l} (l^2 - x^2),$$

Uebersicht der Streckengrößen a, b und c für die Aufzeichnung der Biegelinie.

	Balken AB				Pfosten DA			
Belastungsart								
Momentenfläche								
Biegelinie								
$\frac{a}{K} =$	$\frac{M_A}{6} + \frac{M_B}{3}$	$\frac{M_A}{6} - \frac{M_B}{3}$	$\frac{\mathfrak{M}}{3} - \frac{M_A}{6} - \frac{M_B}{3}$	$\frac{\mathfrak{M}}{4} - \frac{M_A}{6} - \frac{M_B}{3}$	$\frac{M_A}{6}$	$\frac{\mathfrak{M}}{3} + \frac{M_A}{6}$	$\frac{\mathfrak{M}}{4} + \frac{M_A}{6}$	$\frac{M_A}{6} - \frac{M_D}{3}$
$\frac{b}{K} =$	$\frac{M_A}{3} + \frac{M_B}{6}$	$\frac{M_A}{3} - \frac{M_B}{6}$	$\frac{\mathfrak{M}}{3} - \frac{M_A}{3} - \frac{M_B}{6}$	$\frac{\mathfrak{M}}{4} - \frac{M_A}{3} - \frac{M_B}{6}$	$\frac{M_A}{3}$	$\frac{\mathfrak{M}}{3} + \frac{M_A}{3}$	$\frac{\mathfrak{M}}{4} + \frac{M_A}{3}$	$\frac{M_A}{3} - \frac{M_D}{6}$
$\frac{c}{K} =$	$\frac{M_A + M_B}{16}$	$\frac{M_A - M_B}{16}$	$\frac{5\,\mathfrak{M}}{48} - \frac{M_A + M_B}{16}$	$\frac{\mathfrak{M}}{12} - \frac{M_A + M_B}{16}$	$\frac{M_A}{16}$	$\frac{5\,\mathfrak{M}}{48} + \frac{M_A}{16}$	$\frac{\mathfrak{M}}{12} + \frac{M_A}{16}$	$\frac{M_A - M_D}{16}$
	$K = \frac{l^2}{EJ}$				$K_S = \frac{h^2}{EJ_S} = K \cdot \nu \cdot \frac{h}{l}$			

also die Ordinate der Biegelinie im Schnitte x zu

$$y = \frac{\mathfrak{M}_0}{EJ} = \frac{M_B \cdot x}{6\,EJl}\,(l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \quad 22)$$

Der Winkel ϱ, den die Biegelinie im Punkte x mit der Grundlinie einschließt, ist

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{dy}{dx} = \frac{M_B}{6\,EJl}\,(l^2 - 3x^2).$$

Hiernach wird im Punkte A für $x = 0$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_B \cdot l}{6\,EJ}$

im Punkte B für $x = l$: $\operatorname{tg}\beta = -\frac{M_B \cdot l}{3\,EJ}$.

Nach Abb. 108 ist daher in diesem Falle

im Punkte A die Ordinate $a = -l \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{M_B}{3} \cdot \frac{l^2}{EJ}$

im Punkte B die Ordinate $b = l \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{M_B}{6} \cdot \frac{l^2}{EJ}$

aufzutragen. Durch Verbindung der Endpunkte dieser Strecken mit A und B erhält man die gesuchten Endtangenten der Biegelinie.

Die Ordinate c in der Balkenmitte endlich erhält man aus Gl. 22) mit $x = \frac{l}{2}$ zu

$$c = \frac{M_B}{16} \cdot \frac{l^2}{EJ}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich die Herleitung und die Anwendung der in der Zusammenstellung für weitere Belastungsfälle des Balkens und des Pfostens angegebenen Werte a, b und c.

Mit Hilfe der Uebersicht läßt sich jeweils die Biegelinie eines Rahmenstabes mit großer Genauigkeit aufzeichnen. Begnügt man sich jedoch damit, das Bild der Formänderung nur aufzuskizzieren, ohne für die Durchbiegung einen absoluten Maßstab zu verlangen, so kann der für den Rahmenbalken gleichbleibende Festwert $K = \frac{l^2}{EJ} = 1$ angenommen werden. Es sind dann nur die in der Uebersicht angegebenen algebraischen Summen der Biegungsmomente $\mathfrak{M}$, M_A und M_B als Streckengrößen a, b und c in einem beliebigen Maßstabe aufzutragen. Beim Pfosten ist dieser Festwert $K_s = \frac{h^2}{EJ_s} = K \cdot \nu \cdot \frac{h}{l}$, wenn wiederum $\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s}$ gesetzt wird.

8. Die Verschiebung der Rahmenecken.

Während die beiden unteren Rahmenecken in der Regel in ihrer Lage festgehalten sind, treten bei den oberen Rahmenecken senkrechte und wagerechte Verschiebungen ein, die zunächst durch die Verkürzung der Stabsehnen infolge der Stabkrümmungen sowie durch die Längenänderungen infolge der Stablängskräfte verursacht werden. Die senkrechten Verschiebungen können gegenüber den wesentlich größeren wage-

rechten Verschiebungen beim Aufzeichnen der Biegelinie vernachlässigt werden. Nur der deutlicheren Darstellung wegen ist z. B. in Abb. 107 eine senkrechte Verschiebung AA' und BB' bei senkrechter Belastung in übertriebenem Maße angenommen worden. Die bei wagerechter Belastung auftretende wagerechte Verschiebung v der Punkte A und B ist dagegen für die Formänderung des Rahmens von so großer Bedeutung, daß sie beim Auftragen des Formänderungsbildes berücksichtigt werden muß.

Da nach Gleichung 19) und 20) der Stabdrehwinkel ψ die Summe eines Knotendrehwinkels und des zugehörigen Tangentenwinkels ist, kann man die Verschiebung v nach der genauen Gleichung 21)

$$v = h \cdot \sin \psi = h \cdot \sin (\varphi_A + \alpha)$$

berechnen, wozu die nach der Uebersicht auf S. 88 zu ermittelnden Größen $a = l \cdot \operatorname{tg} \beta$ und $b = l \cdot \operatorname{tg} \alpha$ für jeden einzelnen Stab zur Verfügung stehen. Die Verschiebung v muß jedoch sehr stark übertrieben dargestellt werden, um bei gleichem Maßstab ein deutliches Bild der Stabverbiegungen zu erhalten. Da diese starke Verzerrung aber an sich schon eine Reihe mathematischer Ungenauigkeiten mit sich bringt, so empfiehlt es sich, auf die unmittelbare Berechnung der Verschiebung aus den Winkeln zu verzichten und folgenden angenäherten Weg einzuschlagen.

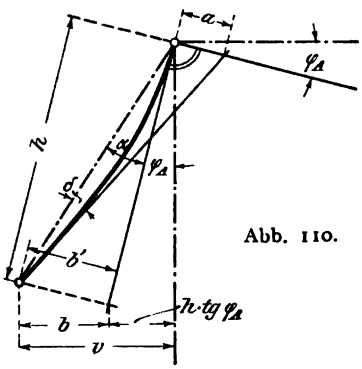


Abb. 110.

Um vom Balken ausgehend die verschobene Lage der unteren Rahmenecke zu finden, berechnet man zunächst nach der Uebersicht für jeden der Stäbe die Tangentenabschnitte a und b. Trägt man nach Abb. 110 unter Benutzung derselben die Endtangenten des Balkens und die zugehörigen Lote an die Balkensehne an, so ist damit der Knotendrehwinkel φ_A und die Tangente an die Biegelinie am oberen Pfostenende gefunden. An diese Tangente ist nunmehr der Tangentenwinkel α des Pfostens anzusetzen, zu welchem Zwecke es genügt, auf der Tangente als Lot im Abstande h von der oberen Rahmenecke den für den Pfosten berechneten Tangentenabschnitt $b' = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$ aufzutragen. Damit ist sowohl die verschobene Stabsehne als auch die Lage der unteren Rahmenecke und folglich die gesuchte Verschiebung v mit hinreichender Genauigkeit gefunden.

IV. Die Nebeneinflüsse.

Die Erörterungen der vorhergehenden Abschnitte haben zur Voraussetzung, daß die Stützen des dreiseitigen Rahmens unwandelbar fest sind, daß also keinerlei Verschiebung derselben in wagerechter oder senkrechter Richtung erfolgt und daß ferner die Wärme des Eisenbetonkörpers sich nicht ändert. Die Wirkungen einer Stützenverschiebung oder einer Wärmeänderung wollen wir als Nebeneinflüsse bezeichnen, die in folgendem an der Hand zweier Versuche an Bauwerken erörtert werden mögen.

A. Einfluß der Stützenverschiebung beim dreiseitigen Rahmen.

1. Wagerechte Verschiebung eines Fußpunktes beim Gelenkrahmen.

Wird durch irgend einen äußeren Einfluß der Stützpunkt C eines Gelenkrahmens (Abb. 111) um das Maß Δl verschoben, so ist für die statische Betrachtung als Ursache dieser Verschiebung eine Kraft X' anzusehen.

Die allgemeine Arbeitsgleichung lautet für diesen Fall:

$$X' \cdot \Delta l = \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial \bar{M}}{\partial X'} \cdot ds,$$

wobei die linke Seite der Gleichung die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte darstellt, die bei der Lösung statisch unbestimmter Aufgaben unter der Annahme fester Stützung gleich Null gesetzt wird.

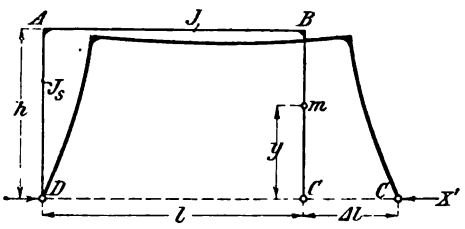


Abb. 111.

Nach Abb. 111 ist in bezug auf einen Punkt m des Pfostens DA oder CB mit der Ordinate y das Biegungsmoment $M = X' \cdot y$, für sämtliche Punkte des Balkens AB dagegen $M = X' \cdot h$. Für den gedachten Belastungszustand durch die wagerechte Kraft $X' = 1$ wird in entsprechender Weise für die Punkte des Pfostens DA und CB das Moment $M = 1\,y$ und für den Balken $\bar{M} = 1\,h$. Folglich lautet die Arbeitsgleichung:

$$\Delta l = 2 \int_0^h \frac{X' y^2}{EJ_s} \cdot dy + \int_0^l \frac{X' h^2}{EJ} \cdot dx$$

oder

$$\frac{2}{3} \frac{X' h^3}{EJ_s} + \frac{X' h^2 \cdot l}{EJ} = \Delta l.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{EJ}{h^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_s} \cdot \frac{h}{l}\right)} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot (3 + 2\nu)} \cdot \frac{\Delta l}{l} \\ \text{oder} \quad X' &= \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{\Delta l}{l} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 23)$$

wobei wiederum, wie auf S. 30, das Nennerglied des Gelenkrahmens $\alpha_1 = 3 + 2\nu$ eingeführt ist. Das Biegungsmoment infolge dieser wagerechten Stützenverschiebung erhält man dann für einen beliebigen Punkt des Pfostens DA oder CB zu

$$\left.\begin{aligned} M &= + X' \cdot y \\ \text{und entsprechend für den Balken zu} \quad M &= + X' \cdot h \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 24)$$

2. Senkrechte Verschiebung eines Fußpunktes beim Gelenkrahmen.

Nimmt man an, daß der Fußpunkt C eines Gelenkrahmens nach Abb. 112 in senkrechter Richtung zwangläufig geführt wird und sich um das Maß Δh senkt, so tritt zunächst eine zwanglose Verdrehung des ganzen Rahmens um den Gelenkpunkt D ein, zugleich aber auch eine Vergrößerung des Abstandes l der Fußpunkte um das Maß $\Delta l'$. Die Kraft K, welche man hier als Ursache dieser Verschiebung $\Delta l'$ auffassen kann, muß durch den Punkt D gehen und ist ohne weiteres nach Gleichung 23) zu ermitteln, wenn statt X' hier K und statt Δl hier $\Delta l'$ gesetzt wird. Die lotrechten und wagerechten Seitenkräfte dieser Kraft K mögen mit X'' und Y'' bezeichnet werden.

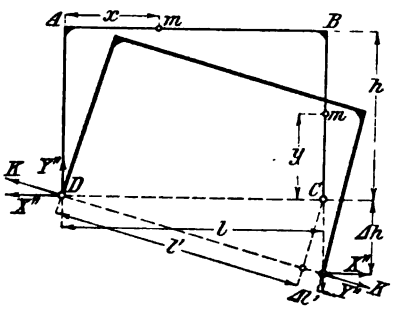


Abb. 112.

Aus Abb. 112 ergibt sich:

$$K = Y'' \cdot \frac{\sqrt{l^2 + (\Delta h)^2}}{\Delta h},$$

und wenn man an Stelle des Kreisbogens angenähert das von C auf die Richtung von K gefällte Lot annimmt:

$$\Delta l' = \frac{(\Delta h)^2}{\sqrt{l^2 + (\Delta h)^2}}.$$

Nach Gleichung 23) ist aber

$$K = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{(\Delta h)^2}{l\sqrt{l^2 + (\Delta h)^2}}.$$

Da aber zugleich

$$K = Y'' \cdot \frac{\sqrt{l^2 + (\Delta h)^2}}{\Delta h}$$

ist, wird

$$Y'' = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{(\Delta h)^3}{l \cdot [l^2 + (\Delta h)^2]} = \text{rd}\ \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \left(\frac{\Delta h}{l}\right)^3. \quad 25)$$

wenn der im Vergleich zu l^2 äußerst kleine Wert $(\Delta h)^2$ im Nenner vernachlässigt und wiederum $\alpha_1 = 3 + 2\nu$ gesetzt wird.

Da ferner nach Abb. 112 $X'' : Y'' = l : \Delta h$ ist, so folgt nach Gleichung 25):

$$X'' = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{(\Delta h)^2}{[l^2 + (\Delta h)^2]} = \text{rd.}\ \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \left(\frac{\Delta h}{l}\right)^2. \quad 26)$$

Endlich wird, da sich oben

$$K = Y'' \cdot \frac{\sqrt{l^2 + (\Delta h)^2}}{\Delta h} \quad \text{ergab,}$$

nach Gleichung 25):

$$K = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{(\Delta h)^2}{l\sqrt{l^2 + (\Delta h)^2}} = \text{rd.}\ \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \left(\frac{\Delta h}{l}\right)^2 = X'' \quad 27)$$

Das Biegungsmoment infolge dieser senkrechten Stützenverschiebung ist hinreichend genau nach Abb. 112 für einen Punkt m der Pfosten DA und CB: $M = + X'' \cdot y$

und des Balkens AB: $M = + X'' \cdot h + Y'' \cdot x$ . . . . . 28)

Die so erhaltenen Gleichungen 23), 25), 26) und 27) für die statisch unbestimmbaren Größen lassen erkennen, daß die Ausdrücke sämtlicher Stützkräfte den gleichen Beiwert $\frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1}$ haben, dessen Größe in der Regel zwischen 200 t und 2000 t liegt. Im übrigen treten als Faktoren nur noch die Verhältnisse $\frac{\Delta l}{l}$, $\left(\frac{\Delta h}{l}\right)^2$ und $\left(\frac{\Delta h}{l}\right)^3$ auf. Da aber die Stützweite mehrere Meter, die Stützensenkung aber wohl nur eine Anzahl von Millimetern beträgt, so sind die Bruchwerte $\frac{\Delta l}{l}$ und $\frac{\Delta h}{l}$ in der Regel nicht größer als etwa $\frac{1}{1000}$, ihre zweite Potenz aber schon etwa $\frac{1}{1\,000\,000}$. Hieraus folgt, daß die Größenordnung der wagerechten Schubkraft X' bei wagerechter Verschiebung eines Fußpunktes etwa zwischen 0,2 t und 2 t liegt, die von X'' bei senkrechter Verschiebung dagegen zwischen 0,0002 t und 0,002 t, daß aber der Wert Y'' verschwindend klein ist und stets vernachlässigt werden kann.

Diese allgemeinen Betrachtungen ergeben somit folgende bemerkenswerte Schlußfolgerungen. Die wagerechten Verschiebungen einer Stütze eines dreiseitigen Gelenkrahmens können wohl bedenklich werden, in der gleichen Weise wie beim elastischen Bogen, weil sie unmittelbar eine Vergrößerung der Stützweite ergeben. Die senkrechten Verschiebungen dagegen sind in der Regel unbedenklich, da sie sich hauptsächlich nur in einer Verdrehung des ganzen Rahmens um den feststehenden Gelenkpunkt äußern, die Stützweite aber nur in geringem Maße vergrößern. Beim dreiseitigen Gelenkrahmen liegen also die Verhältnisse gerade umgekehrt wie beim durchlaufenden Träger, der bekanntlich gegen senkrechte Stützenverschiebungen sehr empfindlich ist.

8. Stützenverschiebung beim eingespannten Rahmen.

Für den Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen wäre die Betrachtung ganz ähnlich durchzuführen. Infolge der festen Einspannung besteht jedoch ein gewisser Zwang gegen eine Verdrehung des Rahmens und auch ein erhöhter Widerstand gegen eine Verschiebung der Pfostenfüße. Die Größenordnung der Stützkräfte kann daher bei senkrechter Verschiebung etwa dieselbe werden wie bei wagerechter Verschiebung. Der eingespannte Rahmen hat demnach gegenüber dem Gelenkrahmen

Abb. 113. Anordnung des Bruchversuches.

den Nachteil einer größeren Empfindlichkeit gegen senkrechte Verschiebungen.

Da die Herleitung allgemeiner Ausdrücke für die statisch unbestimmbaren Größen sehr langwierig ist, so empfiehlt es sich, den Rechnungsgang in gleicher Weise, wie es hier bei dem Gelenkrahmen geschehen ist, aber unter Einsetzung der Zahlenwerte für das gegebene Beispiel unmittelbar durchzuführen.

4. Versuchsergebnisse.

Im Anschluß hieran mögen die Ergebnisse eines vom Verfasser veranstalteten Versuches mit einem Rahmenpaar erörtert werden, bei dem sich zufällig ein Fußpunßt senkte, während die Fußpunkte des benachbarten Rahmens ihre Höhenlage nicht änderten, so daß eine Beurteilung des Einflusses der Stützensenkung auf die beobachteten Formänderungen des Rahmens und die ebenfalls gemessenen Spannungen möglich ist.

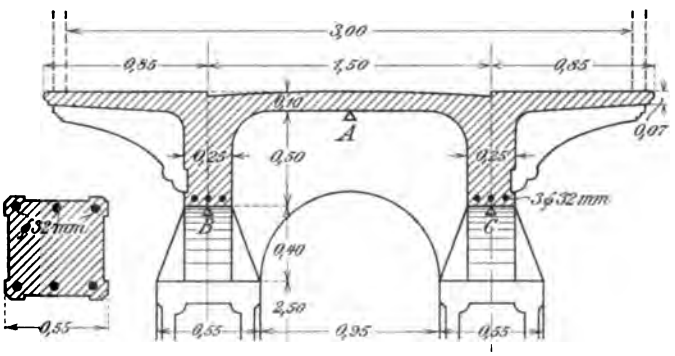


Abb. 114.

Ueber das Hauptergebnis dieses Versuches, nämlich über das Gesetz der Durchbiegungen wurde vom Verfasser bereits 1904 in der „Deutschen Bauzeitung", Betonbeiblatt Nr. 9, kurz berichtet, wobei die hier ausführlicher mitgeteilten Messungsergebnisse jedoch noch nicht veröffentlicht worden sind. Der Versuchsgegenstand war eine von der Firma Joh. Odorico, Dresden, in der „Deutschen Städte-Ausstellung" zu Dresden im Jahre 1903 ausgeführte „Hennebique-Brücke" (s. Abb. 113 bis 115), die mit einer Einzellast in der Mitte bis zum Bruche belastet wurde, nachdem vorher die störende Betonbrüstung beseitigt war. Die rechnerische Nutzlast war 400 kg/m², das Mischungsverhältnis 1 Teil Zement : 3 Teilen Kiessand (1 bis 20 mm Korngröße) : 1 Teil Syenit-Feinschlag (20 bis 30 mm Korngröße) bei einem Wasserzusatz von 14 vH.

Gemessen wurden:

1. Die Durchbiegung δ in der Balkenmitte an beiden Unterzügen B und C sowie in der Plattenmitte A (s. Abb. 114), und zwar mit Durchbiegungszeichnern. Diese Werte sind in Abb. 119 für die wesentlichsten Belastungszustände dargestellt und in Abb. 117 als Funktion der Belastungen Q aufgetragen.

2. Die Säulenbewegungen (und zwar Neigung, wagerechte und senkrechte Verschiebung der Säulenköpfe, die Ausbiegung der Säulenmitten und das Setzen des Bauwerkes) unter Benutzung von Präzisionslibellen, Dehnungszeichnern und Nonienapparaten (s. Abb. 116 und Abb. 119).

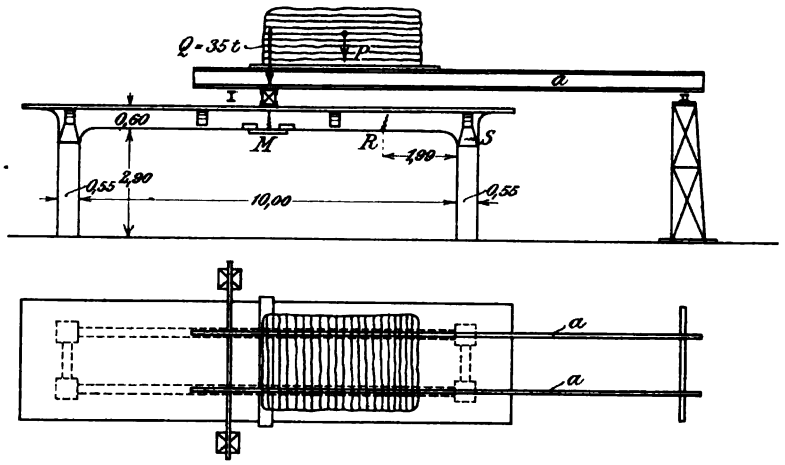


Abb. 115.

3. Die Eisendehnungen durch zwei unmittelbar an den Rundeisen der beiden Unterzüge bei M (Abb. 115) befestigte Fränkel-Leunersche Dehnungszeichner. Die hieraus ermittelten Eisenspannungen σ_E sind in Abb. 117 eingetragen.

Belastet wurde nach einmaliger Entlastung bei 5 t bis zum Bruche, der bei 35 t erfolgte, was dem rund 6fachen der Nutzlast von 400 kg/m² entspricht. Die Risse in den Punkten M und S (Abb. 115) begannen bei 31 t aufzutreten; Druckfalten im Beton waren nicht zu bemerken, feine Haarrisse hatten sich schon bei 13t und einer Eisenspannung von rd. 700kg/cm² gezeigt.

Probekörper, die beim Abbruch aus den Säulen und Unterzügen herausgearbeitet wurden, ergaben trotz der hierbei entstandenen Gefügelockerung noch eine Druckfestigkeit von 170 bis 190 kg/cm² bei einem Alter von 190 Tagen und die Rundeisen eine Zugfestigkeit von 4200 kg/cm².

a) Hauptergebnis. Das bereits a. a. O. mitgeteilte Hauptergebnis des Versuches sei der Vollständigkeit halber besonders unter Hinweis auf die Erörterungen S. 25 hier nochmals unter Hinzufügung einiger Zahlenwerte kurz angeführt.

Aus der Darstellung der Durchbiegungen und der Eisenspannungen (Abb. 117) als Funktion der Belastung ersieht man, daß sich diese Kurven mit großer Annäherung durch drei Gerade ersetzen lassen, welche drei Stadien der Spannungen (besonders der Zugspannungen) kennzeichnen und in Abb. 117 durch die Punkte B, C und D bestimmt sind.

Legt man für die Durchbiegung die Formel zugrunde

$$\delta = C \cdot \frac{Q l^3}{E_b J_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 29)$$

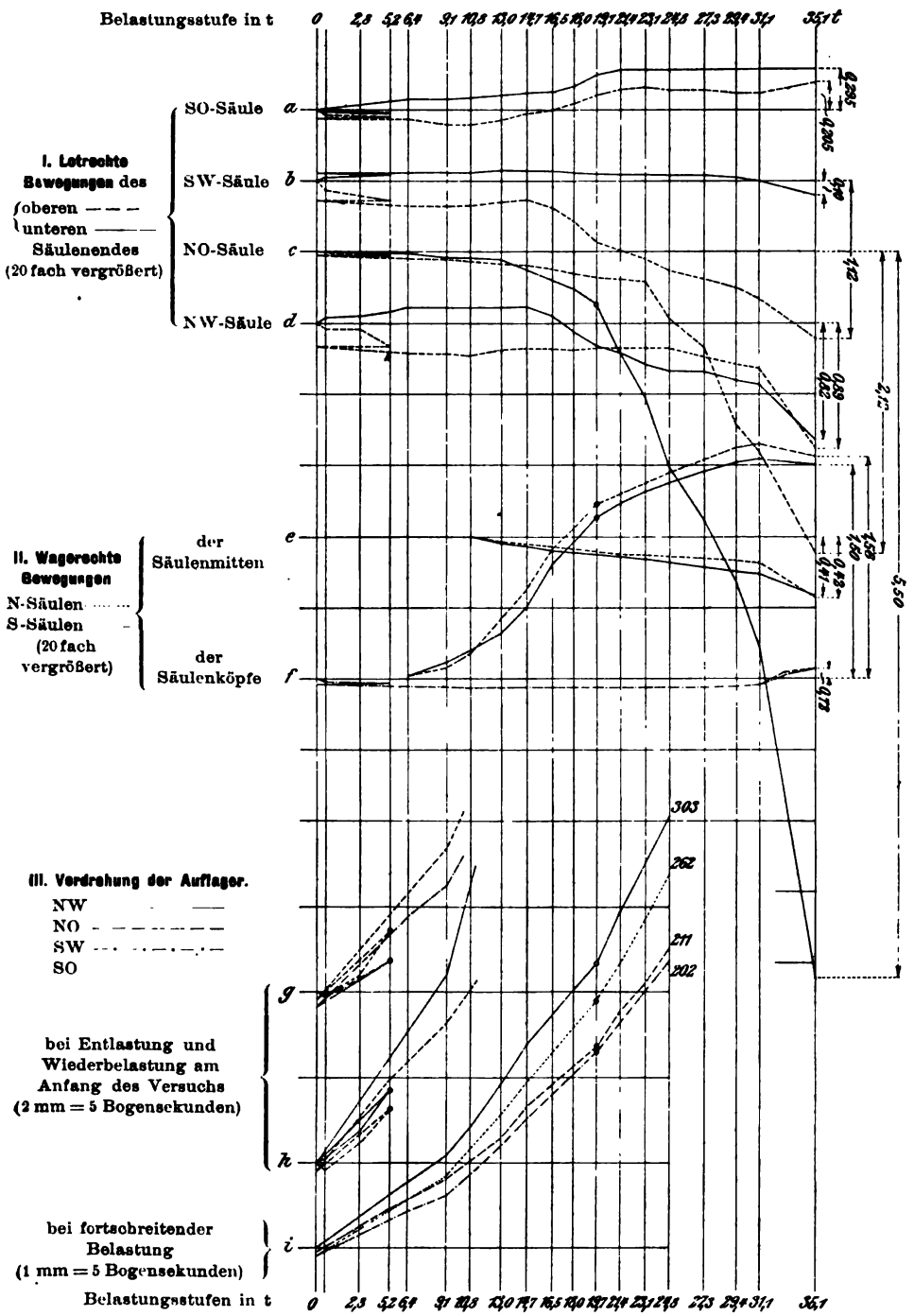


Abb. 116. Darstellung der Säulenbewegungen.

wobei C ein von der Art der Belastung und von dem Grade der Einspannung der Balkenenden abhängiger Festwert und $E_b J_i$ die Steifigkeitsziffer des Bauwerks ist, so geht aus dem zwischen den Knickpunkten A, B, C und D geradlinigen Verlaufe der Kurve hervor, daß

$$E_b J_i = \text{const.}$$

sein muß, da in jeder der einzelnen Strecken

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{Q} = C \cdot \frac{l^3}{E_b J_i} = \text{const.}$$

ist. Obwohl die Elastizitätsziffer E_b des Betons, ein vom Baustoff abhängiger Wert, sowie das Trägheitsmoment J_i des ideellen Querschnitts, sich mit der Belastung beständig ändern, bleibt doch das Produkt beider

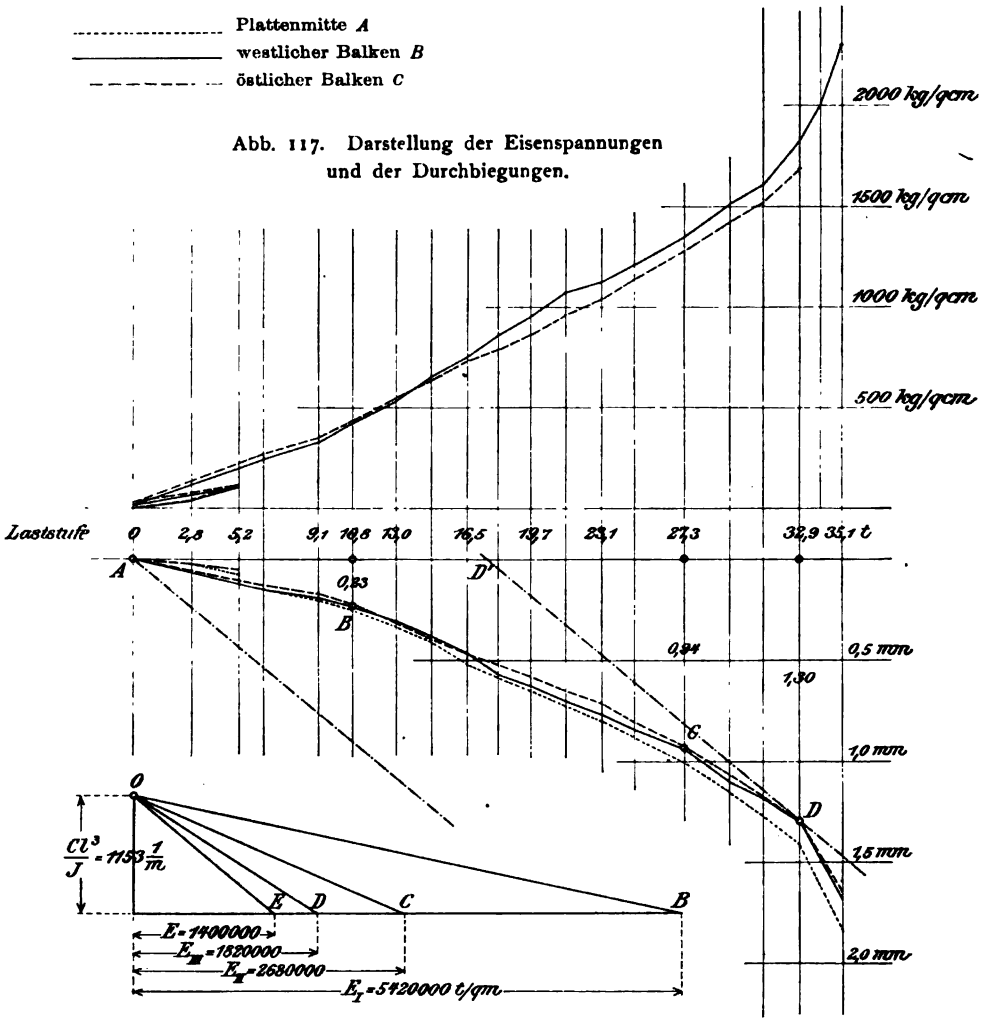


Abb. 117. Darstellung der Eisenspannungen und der Durchbiegungen.

Abb. 118. Zeichnerische Ermittlung der Elastizitätsziffern.

Größen ($E_b J_i$) für ein und dasselbe Stadium nahezu ein Festwert. Jedem dieser drei in den gebrochenen Linien sich kennzeichnenden Stadien entspricht daher eine eigentümliche, sich mit der Belastung nicht ändernde „Steifigkeitsziffer des Bauwerks".

Nimmt man ohne Rücksicht auf den tatsächlich wirksamen Querschnitt als Wert J das Trägheitsmoment des reinen Betonquerschnitts, also für alle Stadien eine gleichbleibende Größe an (vergl. S. 22), so kann man für jedes Stadium den zugehörigen Wert der Elastizitätsziffer E_{I}, E_{II} und E_{III} berechnen. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß diese Werte nicht die Elastizitätsziffern des Betons darstellen, sondern vielmehr diesen ähnliche, charakteristische Werte des Verbundkörpers sind.

In unserem Falle ergibt sich die Durchbiegung in der Trägermitte bei der Belastung durch eine Einzellast Q nach Abb. 115 zu

$$\delta_m = \frac{Q l^3}{E J} \cdot \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{8} \frac{X}{Q} \cdot \frac{h}{l} \right).$$

Da der Rahmenschub nach S. 30

$$X = Q \cdot \frac{l}{8h} \cdot \frac{3}{\alpha_1}$$

ist, wird der Klammerausdruck

$$C = \frac{1}{48} - \frac{3}{64 \alpha_1}.$$

Für die Abmessungen des geprüften Bauwerks $h = 4{,}15$ m, $l = 10{,}5$ m, $J = 0{,}00888$ m^4 und $J_e = 0{,}00762$ m^4 ist $\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_e} = 0{,}46$ und $\alpha_1 = 3 + 2\nu = 3{,}92$, also

$$C = -\frac{3}{64 \cdot 3{,}92} + \frac{1}{48} = \frac{1}{113}.$$

Da sich aus Abb. 117 der Wert für die Neigung der ersten Geraden AB

$$\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{I}} = \frac{0{,}23 \text{ mm}}{10{,}8 \text{ t}} = 0{,}000213 \text{ m/t}$$

entnehmen läßt, erhält man nach Gl. 29) für $C = \frac{1}{113}$

$$EJ = \frac{C l^3}{\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{113} \cdot \frac{10{,}5^3}{0{,}000213} = 48200 \text{ t/m}^2,$$

oder für $J = 0{,}00888$ m^4 wird

$$E_{\mathrm{I}} = 5420000 \text{ t/m}^2 = \mathbf{542000} \text{ kg/cm}^2.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für die zweite Gerade BC aus Abb. 117 die Neigung

$$\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{II}} = \frac{(0{,}94 - 0{,}23) \text{ mm}}{(27{,}3 - 10{,}8) \text{ t}} = 0{,}000430 \text{ m/t}$$

und folglich

$$EJ = \frac{C l^3}{\operatorname{tg} \alpha_{\mathrm{II}}} = \frac{1}{113} \cdot \frac{10{,}5^3}{0{,}000430} = 23800 \text{ t/m}^2,$$

und für $J = 0{,}00888$ m^4 wird

$$E_{\mathrm{II}} = 2680000 \text{ t/m}^2 = \mathbf{268000} \text{ kg/cm}^2.$$

Endlich erhält man für die dritte Gerade CD aus Abb. 117 die Neigung

$$\operatorname{tg}\alpha_{III} = \frac{(1{,}30 - 0{,}94)\text{ mm}}{(32{,}9 - 27{,}3)\text{ t}} = 0{,}000643\text{ m/t}$$

und folglich

$$EJ = \frac{Cl^3}{\operatorname{tg}\alpha_{III}} = \frac{1}{113}\cdot\frac{10{,}5^3}{0{,}000643} = 16000\text{ t/m}^2,$$

und für $J = 0{,}00888\text{ m}^4$ wird

$$E_{III} = 1\,820000\text{ t/m}^2 = \mathbf{182000}\text{ kg/cm}^2.$$

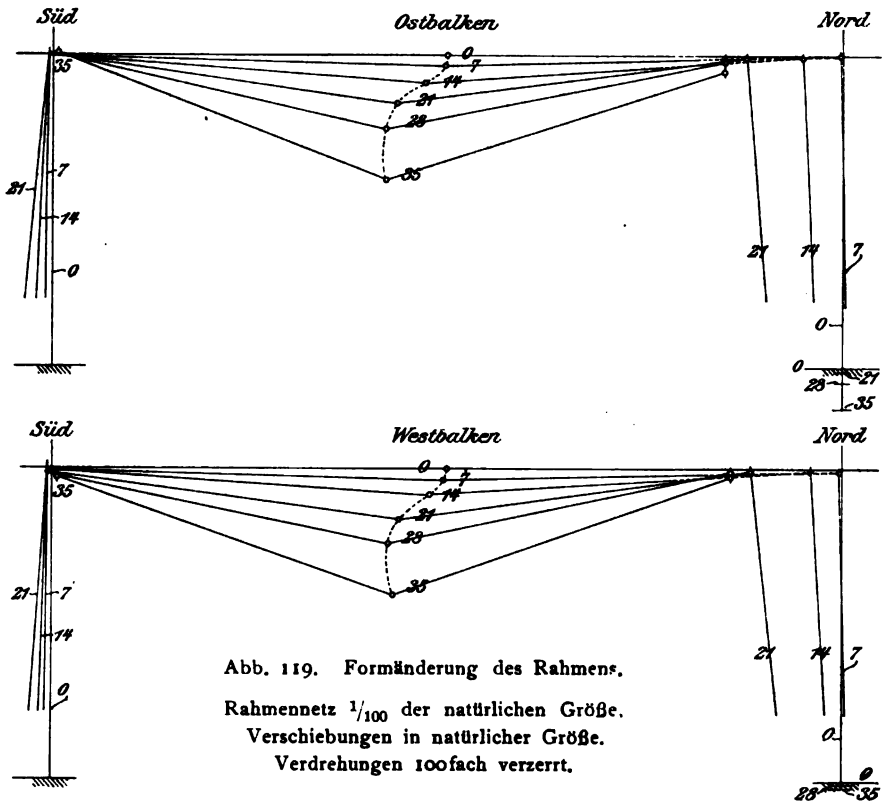


Abb. 119. Formänderung des Rahmens.
Rahmennetz $^1/_{100}$ der natürlichen Größe.
Verschiebungen in natürlicher Größe.
Verdrehungen 100fach verzerrt.

Die gleichen Werte ergeben sich auch graphisch, wenn man nach Abb. 118 den Wert $\frac{Cl^3}{J}$ als Ordinate aufträgt und von deren oberen Endpunkt 0 die Parallelen zu den Geraden AB, BC und CD zieht.

In Abb. 117 ist endlich, vom Nullpunkt A ausgehend, noch eine strichpunktierte Gerade eingetragen, welche dem für die Eisenbetonberechnung gebräuchlichen Werte

$$E = \mathbf{140000}\text{ kg/cm}^2$$

entspricht. Zieht man zu dieser Geraden eine Parallele DD' als Tangente an die Durchbiegungslinie, so berührt sie diese an der Stelle der Bruch-

erscheinungen. Man sieht hieraus, daß für den Bruchzustand, der den Eisenbetonberechnungen im allgemeinen zugrunde gelegt ist, der Wert $E = 140000$ kg/cm² wohl berechtigt ist. Würde man dagegen die Durchbiegung mit Hilfe dieses Wertes ermitteln wollen, so würden sich, wie der Vergleich der strichpunktierten Geraden durch A mit der wirklichen Durchbiegungslinie zeigt, wesentlich zu hohe Werte ergeben Um die Durchbiegungslinie im voraus zuverlässig bestimmen zu können, müßten durch weitere Versuche die Schnittpunkte der zweiten und dritten Geraden mit der Belastungsachse gesetzmäßig festgelegt werden.

b) Nebeneinflüsse. Die an dem Versuchsträger vorgenommenen Messungen haben außer diesem hier angeführten Hauptergebnis noch weiterhin dazu geführt, den Nebeneinfluß einer zufälligen senkrechten Verschiebung eines Rahmenfußes auf die gesamte Formänderung des Rahmens und auf die Eisenspannungen in der Balkenmitte zu erörtern.

Während die senkrechten Verschiebungen der Säulenköpfe und -füße nach Abb. 116b und d auf die Dauer des ganzen Versuches verschwindend klein blieben, zeigte sich nach Abb. 116c von der Laststufe $Q = 19{,}7$ t ab ein auffallendes Setzen der Nordostsäule, das insgesamt 5,5 mm betrug. Der bei dieser Laststufe in Abb. 116c auftretende Brechpunkt ist auch in den Verdrehungen der Auflagertangente (Abb. 116i) und den wagerechten Verschiebungen des Säulenkopfes (Abb. 116f) deutlich wiederzufinden. Es ist somit wohl ein Einfluß der einseitigen Stützensenkung auf die Formänderung des Rahmens zu erkennen. Wie die vergleichende Zusammenstellung der Durchbiegungen und Auflagerbewegungen bei den einzelnen Laststufen für den östlichen und westlichen Rahmen (Abb. 119) zeigt, wird die bis dahin deutlich auftretende Bewegung nach innen bei den Laststufen von mehr als 20 t stark verzögert (vergl. Abb. 116f). Die Ursache hierfür bildet die nunmehr beginnende Stützensenkung, die nach Abb. 120 eine Verschiebung des Kopfes der sich senkenden Säule nach außen zur Folge hat. Durch diese Stützensenkung in Abb. 120 erklärt sich auch, daß, wie in Abb. 116i erkennbar ist, die Verdrehung der Auflagertangente an der Südostsäule stärker zunimmt als an der Nordostsäule.

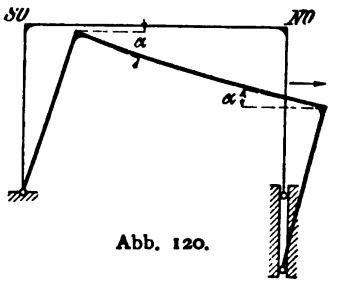


Abb. 120.

Dieser deutlich sichtbare Einfluß der Stützensenkung auf die Formänderung des Rahmens ließ vermuten, daß sich auch die Spannungen in der Balkenmitte infolge dieser Senkung ändern würden. Nach Gleichung 26) ergibt sich aber, da der Beiwert $\frac{3EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} = \frac{3 \cdot 23\,400}{4{,}15^2 \cdot 3{,}92} = 1040$ ist, für die Senkung $\Delta h = 5{,}5$ mm

$$X' = 1040 \cdot \left(\frac{0{,}0055}{10{,}5} \right)^2 = (2{,}85 \cdot 10^{-4})\,\text{t} = \text{rund } 0{,}3 \text{ kg}$$

und nach Gleichung 25)

$$Y' = 1040 \cdot \left(\frac{0{,}0055}{10{,}5}\right)^3 = (1{,}5 \cdot 10^{-7})\,\mathrm{t} = \frac{1{,}5}{10^4}\,\mathrm{kg}$$

und das Biegungsmoment für die Balkenmitte

$$M' = X'h + Y' \cdot \frac{l}{2} = \frac{2{,}85\,\mathrm{t}}{10^4} \cdot 4{,}15\,\mathrm{m} + \frac{1{,}5\,\mathrm{t}}{10^7} \cdot 5{,}25\,\mathrm{m} = \frac{1{,}2}{10^3}\,\mathrm{tm}$$
$$= \mathbf{120}\ \mathrm{kgcm}.$$

Da bei der Laststufe von 23,1 t das Biegungsmoment in der Balkenmitte

$$M_m = \mathfrak{M}_m - M_a = 60{,}60 - 23{,}20 = 37{,}40\ \mathrm{tm} = 3\,740\,000\ \mathrm{kgcm}$$

beträgt, ersieht man, daß der Einfluß der geringen Stützensenkung in unserem Falle auf die Spannungsverteilung des Balkens nur verschwindend klein sein kann und sich der Beobachtung entziehen muß.

Aus der Abb. 117 erkennt man, daß die Brechpunkte der Abb. 116c und 116f dort nicht auftreten und ein Einfluß der lotrechten Verschiebung eines Stützpunktes, der sich in einer Vergrößerung der Eisenspannungen beim östlichen Rahmen zeigen müßte, nicht vorhanden ist. Es tritt jedoch, wie aus Abb. 117 zu entnehmen ist, eine Verminderung der Spannungen und Durchbiegungen im östlichen Rahmen gegenüber dem stehengebliebenen westlichen Rahmen ein, die nicht anders zu erklären ist, als daß man nach Abb. 121 annimmt, daß sich der Fuß der Nordostsäule nach innen zu verschoben habe. Diese Bewegung konnte mangels der erforderlichen Instrumente am Versuchskörper nicht festgestellt werden, doch ist sie bei dem weichen Boden als sehr wahrscheinlich anzunehmen.

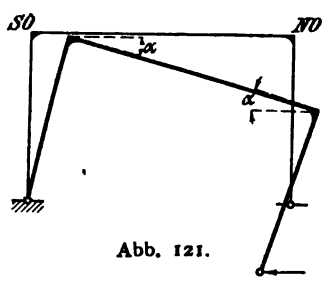


Abb. 121.

Aus diesen Versuchsergebnissen geht somit hervor, daß eine einseitige Stützensenkung bei einem dreiseitigen Rahmen wohl das Bild der Formänderung deutlich beeinflussen kann, auf die Spannungsverteilung aber nur einen verschwindend kleinen Einfluß ausübt.

B. Einfluß der Wärmeänderung.

1. Die Wärmeänderung beim Gelenkrahmen.

Auf das in der Regel den Erörterungen zugrunde gelegte Hauptnetz der Abb. 122 mit einem Gelenklager bei D und einem Rollenlager bei C möge eine Wärmeänderung von $+ t^\circ$, also eine Wärmeerhöhung einwirken. Dann geht infolge der gleichmäßigen Ausdehnung der drei Stäbe der Rahmen $DABC$ in die geometrisch ähnliche Form $DA'B'C'$ über. Während im Hauptnetz der Abb. 122 diese Verschiebung zwanglos, also ohne Spannungen vor sich gehen kann, ist in Wirklichkeit beim Gelenkrahmen der Abb. 123 Punkt C unverschieblich festgehalten. Bei einer Wärmezunahme um t° treten dann dieselben Beanspruchungen in dem

Rahmen auf, als wenn in Abb. 122 Punkt C' durch eine Kraft X_t nach Punkt C zurückgeschoben würde.

Diese Verschiebung ist

$$\Delta_t = \varepsilon t l,$$

wenn ε die Ausdehnungsziffer des Eisenbetonkörpers, t die Anzahl der Wärmegrade und l die Rahmenstützweite bedeuten.

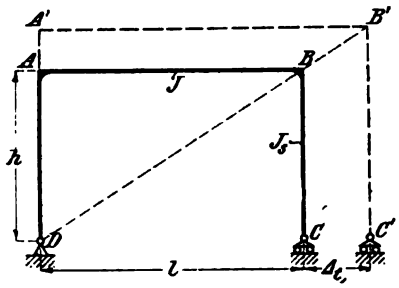


Abb. 122.

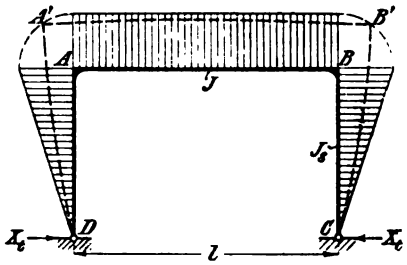


Abb. 123.

Setzt man diesen Wert für Δ_t an Stelle von Δl in Gleichung 23), S. 91 ein, so ergibt sich

$$X_t = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \frac{\varepsilon t l}{l} = \frac{3\,EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} \cdot \varepsilon t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

Folglich sind die Eckmomente infolge der Wärmeänderung

$$M_A = M_B = -X_t \cdot h = -\frac{3\,\varepsilon t \cdot EJ}{h \cdot \alpha_1} \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

Die aus diesen Momenten berechneten Spannungen sind stets zu den von der Belastung hervorgerufenen zuzuschlagen, da sowohl eine Abkühlung als eine Erwärmung um t^0 C. gegenüber der mittleren Temperatur eintreten kann.

Der Wert für das Biegungsmoment, der für die ganze Länge des Balkens AB gleich groß ist, und zwar M_A, ist nach Gleichung 31) proportional der Ausdehnungsziffer ε, der Wärmeänderung t und der Steifigkeitsziffer EJ des Balkens, dagegen umgekehrt proportional der Pfostenhöhe h und dem Nennergliede α_1. Der Einfluß der Wärmeänderung auf die Spannungen ist demnach um so größer, je steifer der Balken ausgebildet, je größer also EJ und je geringer die Pfostenhöhe h ist.

Zur Beurteilung des Einflusses der Wärmewirkung auf die Spannungen im Rahmen möge folgendes Beispiel dienen:

Eine Stromöffnung von 43 m Stützweite sollte entweder mit einem Zweigelenkbogen oder mit einem Gelenkrahmen überbrückt werden. Die Gegenüberstellung dieser beiden Grundformen zeigt zunächst beim Rahmen den Vorteil, daß das Durchflußprofil bei gleicher Lichthöhe weniger eingeschränkt wird wie beim Bogen I, dessen Kämpferzwickel stark in das

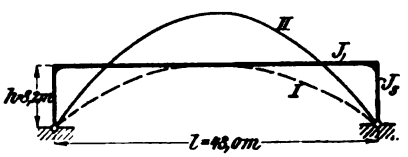


Abb. 124.

Hochwasser eintauchen (s. Abb. 124). Vergleicht man ferner die Schubkräfte beider Grundformen, so sieht man (s. auch Abb. 84, S. 62), daß, falls die Stützkräfte bei beiden gleich groß sein sollen, die Stützlinie des Bogens sich mit der Mittelkraftlinie des Rahmens decken müßte. An Stelle des Rahmens müßte daher unter dieser Bedingung der Bogen II treten. Aus dem Vergleich beider Bogen I und II geht aber ohne weiteres hervor, daß der flachere Bogen I größere Schubkräfte ausübt als der Bogen II und somit auch als der Rahmen.

Der für diesen Fall entworfene Rahmen besaß bei $l = 43$ m Stützweite, $h = 8{,}2$ m Pfostenhöhe, die Trägheitsmomente im Balken $J = 0{,}334$ m^4, im Pfosten $J_s = 1{,}04$ m^4. Der durch eine Wärmeänderung von $t = 20°$ ausgeübte Schub berechnet sich mit $E = 200\,000$ kg/cm^2 $= 2\,000\,000$ t/m^2 und $\varepsilon = 0{,}0000125$ sowie

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} = \frac{8{,}20}{43{,}0} \cdot \frac{0{,}334}{1{,}04} = 0{,}0612$$

und $$\alpha_1 = 3 + 2\,\nu = 3 + 2 \cdot 0{,}0612 = 3{,}122$$

zu $$X_t = \frac{3\,\varepsilon t \cdot EJ}{h^2 \cdot \alpha_1} = \frac{3 \cdot 20}{800 \cdot 100} \cdot \frac{2\,000\,000 \cdot 0{,}334}{8{,}2^2 \cdot 3{,}122} = \mathbf{2{,}4}\text{ t}.$$

Für dieses Beispiel betrug der Rahmenschub infolge des Eigengewichts 65 t und infolge der Verkehrslast 17,8 t, also zusammen 82,8 t.

Es ist somit hier der Rahmenschub infolge der Wärmeänderung nur rd. 3 vH. des durch die senkrechten Lasten erzeugten Schubes.

Würde dagegen die Pfostenhöhe nur halb so groß wie in Abb. 124 angenommen werden, also $h = 4{,}10$ m, so würde sich unter sonst gleichen Verhältnissen

$$\nu = \frac{4{,}1}{43{,}0} \cdot \frac{0{,}334}{1{,}04} = 0{,}0306 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 3 + 2\,\nu = 3{,}061$$

ergeben und

$$X_t = 3 \cdot \frac{20}{800 \cdot 100} \cdot \frac{2\,000\,000 \cdot 0{,}334}{4{,}1^2 \cdot 3{,}061} = 9{,}7\text{ t}.$$

Es zeigt sich somit, da der Einfluß von ν und α_1 auf X_t sehr gering ist, daß bei gleichbleibenden Querschnittsabmessungen von Balken und Pfosten und derselben Stützweite die Rahmenschübe umgekehrt proportional dem Quadrat der Pfostenhöhe sind.

2. Versuchsergebnisse.

Einer der hauptsächlichsten Faktoren in der Gleichung 31) ist die Größe t, die Änderung der Körperwärme. Um für die Beurteilung dieses wichtigen Wertes einen Beitrag zu liefern, wurden an dem Versuchsträger, der gelegentlich der Ausführung der Querbahnsteighalle für den Hauptbahnhof Leipzig[1]) von der Firma Dyckerhoff & Widmann A.-G. in Cossebaude hergestellt und belastet wurde (s. Abb. 127), vom Verfasser eingehende

[1]) Vergl Gehler, Querbahnsteighalle in Eisenbeton für den Hauptbahnhof in Leipzig, Deutsche Bauzeitung, Betonbeiblatt 1912, Nr. 9, 10 u. 11.

Messungen veranlaßt. Die geometrische Ansicht des Versuchsträgers von 34,7 m Stützweite ist in Abb. 125, der Querschnitt a-a in Abb. 126 dargestellt.

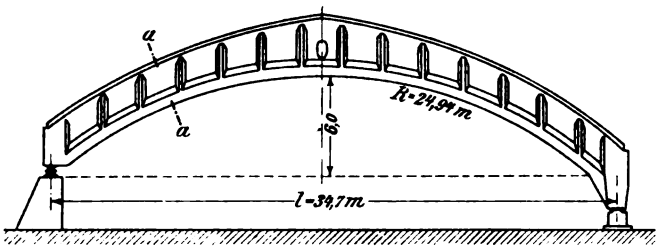


Abb. 125.

Während auf der rechten Seite der Abb. 125 ein Kipplager vorhanden war, befand sich auf der linken Seite ein Rollenlager, das aus zwei Stahlrollen mit 22,5 cm Durchmesser bestand. An diesem Rollenlager wurde während eines ganzen Jahres täglich dreimal die durch die Wärmeänderung verursachte Längenänderung des unbelasteten Trägers und gleichzeitig die Luftwärme im Schatten gemessen. Die eingehende Erörterung dieser umfangreichen Beobachtungen bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

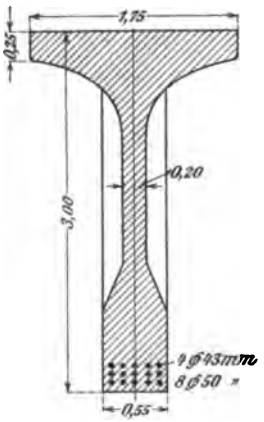


Abb. 126

Aus der Verschiebung des Rollenlagers kann nunmehr, falls die Ausdehnungsziffer des Eisenbetonkörpers als bekannt angenommen wird, die mittlere Körperwärme t' des Versuchsträgers berechnet werden.

Es ist die Verschiebung $\Delta l = \varepsilon t' l$, also $t' = \frac{\Delta l}{\varepsilon l}$, und wenn man die mittlere Ausdehnungsziffer zu

$$\varepsilon = \frac{1}{80\,000} = 0{,}0000125 \text{ für } 1^\circ \text{ C.}$$

annimmt, bei einer Stützweite $l = 34\,700$ mm:

$$t' = \frac{\Delta l \cdot 80\,000}{34\,700} = 2{,}31\,\Delta l \text{ mm.}$$

Einer Verschiebung des Lagers von 2,31 mm entspricht also eine Wärmeänderung des Eisenbetonkörpers von 1° C.

In dieser Weise ist die Veränderung der Körperwärme aus jeder abgelesenen Lagerverschiebung berechnet worden. Eine Schwierigkeit bestand jedoch darin, daß die Wärme des Eisenbetonkörpers bei Beginn des Versuches nicht gemessen werden konnte. Um für die Annahme dieses Wertes einen Anhalt zu haben, wurde der Mittelwert der gemessenen Luftwärme für die Monate Februar und März gebildet und die wohl zulässige Voraussetzung gemacht, daß die mittlere Körperwärme

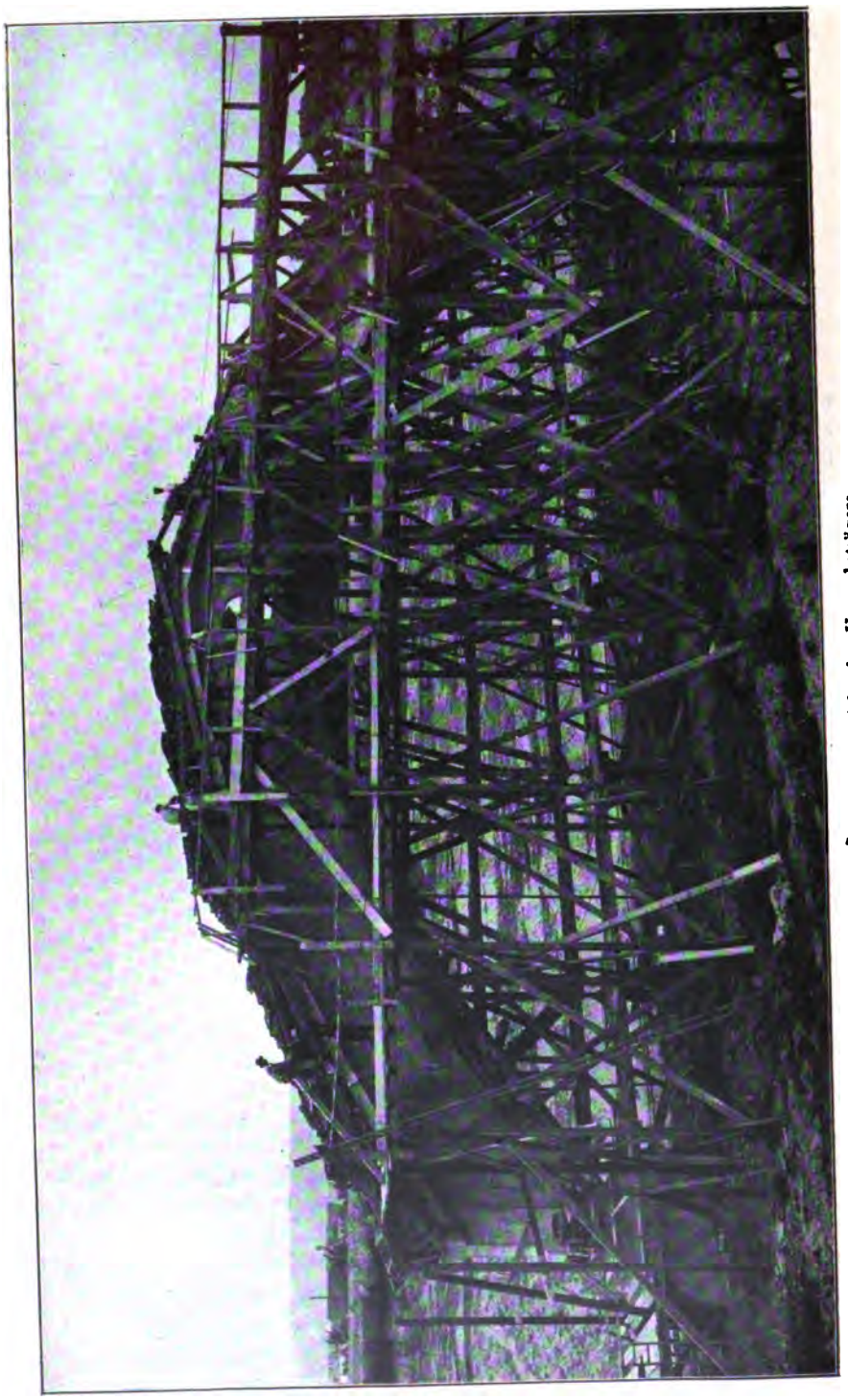


Abb. 127. Ansicht des Versuchsträgers.

des Versuchsträgers mit der in diesen Monaten zufällig sehr gleichmäßig gebliebenen Luftwärme zusammenfiel. Hierdurch ergab sich eine Erhöhung der ursprünglich berechneten Werte um 2,05° C.

Abb. 128. Ansicht des verschobenen Gelenklagers.

In Abb. 129 und 130 sind als Ordinaten die gemessene Luftwärme und die aus der beobachteten Verschiebung des Rollenlagers berechnete Körperwärme für die Monate März und April 1912 aufgetragen. Aus dieser Darstellung erkennt man, daß die ausgezogene Linie der Körperwärme allen Schwankungen der gestrichelten Luftwärme regelmäßig folgt. Diese Gesetzmäßigkeit wird im weiteren Verlaufe des Versuches allerdings des öfteren durch gewisse Störungen beeinflußt, wie z. B. durch unmittelbare Sonnenbestrahlung, durch Befeuchtung infolge des Regens und anschließende Verdunstung, sowie durch die innere Trägheit dieses als Meßapparat anzusehenden Eisenbetonkörpers infolge der Lagerreibung und der elastischen Formänderungen des stark gekrümmten Trägers, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

In Abb. 129 sei besonders auf das Ansteigen der Körperwärme infolge der wiederholt eintretenden beträchtlichen Erhöhung der Luftwärme vom 27. bis 30. März hingewiesen von etwa +6° bis auf +21° C. Die Körperwärme steigt am 27. März von +5° auf +8°, am 28. März

auf + 12° und am 30. März auf den Höchstwert von + 17°, folgt aber dann sogleich wieder der Erniedrigung der Luftwärme in den nächsten Tagen bis auf — 1 °C. Ein gleiches Bild zeigt sich nach Abb. 130 am 18., 19. und 20. April. An diesen drei Tagen erreicht die Luftwärme jedesmal zu Mittag den Wert von + 22 °C., während sie in der Nacht wieder auf + 10° bis 14° zurückgeht. Die Körperwärme folgt diesem täglichen Impulse in drei Stufen von 15°, 18,5° und 20°. Unter der Annahme, daß der Körper bei einer Wärme von + 10° hergestellt wurde, erhebt sich in diesem Falle die Körperwärme um 10°, die Luftwärme dagegen um 12,5° über dieses Mittel, so daß der Zuwachs t der Körperwärme hier also nur 80 vH. der Erhöhung der Luftwärme beträgt.

Bei der Beurteilung dieses Wertes ist jedoch zu bedenken, daß in diesem Falle eine unmittelbare Sonnenbestrahlung während des ganzen Tages auf der zufällig nach Süden gerichteten Ansichtsfläche sowie auch auf der unbedeckten Oberfläche des Versuchskörpers erfolgen und dieser daher beständig Wärme aufspeichern konnte. In einem solchen Falle ist es sogar möglich, daß bei einer längeren Hitzeperiode der Körper die Wärme länger behält als die ihn umgebende Luft.

Endlich konnte bei diesem eigenartigen Körperquerschnitt von 3 m Höhe und nur 0,20 m kleinster Wandstärke (Abb. 126) eine ungewöhnlich rasche Durchwärmung erfolgen. In der Wirklichkeit sind dagegen die Haupttragwerke unserer Bauten fast niemals in dieser ungünstigen Weise der Sonnenbestrahlung ausgesetzt, sondern in der Regel bei Hochbauten durch die Dachdeckung, bei Brückenbauten durch eine Versteinungsschicht gegen den Einfluß der strahlenden Wärme geschützt. Ferner wird der Körper naturgemäß um so langsamer erwärmt, je geringer das Verhältnis der den Wärmestrom aufnehmenden Ansichtsfläche zu dem zu erwärmenden Rauminhalt des Körpers, je größer also die mittlere Stärke des Eisenbetonkörpers ist.

Aus diesen Beobachtungen läßt sich daher wohl der Schluß ziehen, daß bei den Tragwerken unserer Eisenbetonbauten im allgemeinen mit einer wesentlich geringeren Wärmeänderung als 80 vH. der Wärmeschwankung der Luft gerechnet werden darf.

Zum Schluß sei noch auf die Geraden AA' und BB' in Abb. 129 und 130 hingewiesen, welche die Geschwindigkeit veranschaulichen, mit der der Wärmestrom in den Eisenbetonkörper eingedrungen ist.

Buchdruckerei Gebr. Ernst, Berlin SW 68.

V. Leitfaden für die Anwendung.

A. Wiederholung des Gedankenganges der Rechnung.

Bevor wir eine Reihe Rechnungsbeispiele für ausgeführte Rahmen als Leitfaden für die Anwendung der im vorstehenden gegebenen Rahmenberechnung durchführen, möge der Gedankengang unseres Verfahrens nochmals kurz dargelegt werden.

Für den immerhin nicht einfachen Belastungsfall des Pfostens eines eingespannten Rahmens nach Abb. 131a (S. 111) mittels einer Einzellast $W = 2{,}0\,\mathrm{t}$ sollen die Biegungsmomente, die Querkräfte und die Längskräfte des Rahmens berechnet werden.

1. Die Biegungsmomente sind mit Hilfe der Formel 11) für den Einspannungsgrad (siehe Zusammenstellung am Schlusse) ohne weiteres zu berechnen. Für die Stützweite $l = 15{,}0$ m, die Pfostenhöhe $h = 10{,}0$ m und den Abstand der Kraft $r = 7{,}0$ m, ferner für das Trägheitsmoment des Balkens $J = 0{,}030\ \mathrm{m}^4$ und das des Pfostens $J_s = 0{,}015\ \mathrm{m}^4$ erhält man zunächst den Wert

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} = \frac{10{,}0}{15{,}0} \cdot \frac{0{,}030}{0{,}015} = 1{,}33,$$

ferner die Nennerglieder

$$\alpha_2 = 2 + \nu = 3{,}33$$
$$\beta_2 = 1 + 6\,\nu = 9{,}00$$

und endlich

$$\eta = \frac{r}{h} = \frac{7{,}0}{10{,}0} = 0{,}7.$$

Somit ergeben sich nach Formel 11), da

$$\frac{\eta}{2\,\alpha_2} = \frac{0{,}7}{6{,}66} = 0{,}105$$

ist, die Werte des Einspannungsgrades

$$\mu_A = -\frac{\eta}{2\,\alpha_2} \cdot \nu \cdot \left(\frac{5 - 3\,\nu}{\beta_2} + \eta\right) = -0{,}105 \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{5-4}{9{,}0} + 0{,}7\right)$$
$$= -0{,}14 \cdot 0{,}811 = -0{,}113$$

$$\mu_B = +\frac{\eta}{2\,\alpha_2} \cdot \nu \cdot \left(\frac{7 + 9\,\nu}{\beta_2} - \eta\right) = +0{,}105 \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{7+12}{9{,}0} - 0{,}7\right)$$
$$= +0{,}14 \cdot 1{,}411 = +0{,}198$$

$$\mu_C = -\frac{\eta}{2\,\alpha_2} \cdot \left(\frac{3 + 14\,\nu + 9\,\nu^2}{\beta_2} - \eta\,[1+\nu]\right) = -0{,}105 \cdot \left(\frac{3 + 18{,}63 + 16{,}0}{9{,}0} - 0{,}7 \cdot 2{,}33\right)$$
$$= -0{,}105 \cdot 2{,}54 = -0{,}268$$

$$\mu_D = 1 - \frac{\eta}{2\,\alpha_2} \cdot \left(\frac{3 + 26\,\nu + 15\,\nu^2}{\beta_2} - \eta\,[1+\nu]\right) = 1 - 0{,}105 \cdot \left(\frac{3 + 34{,}67 + 26{,}67}{9{,}0} - 0{,}7 \cdot 2{,}33\right)$$
$$= 1 - 0{,}105 \cdot 5{,}51 = +0{,}421.$$

Eine vorzügliche Probe besteht darin, daß die Gleichung IIb (S. 54)

$$(\mu_A - \mu_B) - (\mu_D - \mu_C) = -1$$

erfüllt sein muß, was hier in der Tat der Fall ist. Mit Hilfe dieser Gleichung können grobe Rechenfehler sofort erkannt oder kleine Ungenauigkeiten, die sich bei der Verwendung des Rechenschiebers in der letzten Dezimale ergeben haben, ausgeglichen werden.

Da das Einspannungsmoment des statisch bestimmten Kragträgers DA im Punkt D

$$\mathfrak{M}_K = -W \cdot r = -2{,}0 \cdot 7{,}0 = -14{,}0 \text{ tm}$$

ist, ergeben sich die gesuchten vier Eckmomente zu:

$$M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_K = (-0{,}113) \cdot (-14{,}0) = +1{,}59 \text{ tm}$$
$$M_B = \mu_B \cdot \mathfrak{M}_K = (+0{,}198) \cdot (-14{,}0) = -2{,}77 \text{ ,,}$$
$$M_C = \mu_C \cdot \mathfrak{M}_K = (-0{,}268) \cdot (-14{,}0) = +3{,}75 \text{ ,,}$$
$$M_D = \mu_D \cdot \mathfrak{M}_K = (+0{,}421) \cdot (-14{,}0) = -5{,}89 \text{ ,,}$$
$$\Sigma(M) = 14{,}00 \text{ tm} = (\mathfrak{M}_K).$$

Addiert man die absoluten Werte (M) der vier Eckmomente, so ergibt sich nach Gleichung IIb' (S. 54) wiederum zur Probe

$$(M_A) + (M_B) + (M_C) + (M_D) = (\mathfrak{M}_K),$$

also 14,0 tm.

Damit sind die statisch unbestimmbaren Größen der Aufgabe gefunden.

2. Die Querkräfte und die Längskräfte erhält man am einfachsten dadurch, daß man in das Rahmennetz der Abb. 131b zunächst an den vier Rahmenecken die oben berechneten Werte der Eckmomente unter Berücksichtigung des Vorzeichens als Streckengrößen aufträgt, und zwar die positiven Werte nach innen, die negativen Werte nach außen zu. Am belasteten Pfosten AD ist an die Linie A_0D_0 noch die positive Momentenfläche des einfachen Balkens AD der Abb. 131c anzusetzen, wobei das Biegungsmoment im Lastpunkt E

$$\mathfrak{M} = \frac{W \cdot r\,(h-r)}{h} = 2{,}0 \cdot \frac{7{,}0 \cdot 3{,}0}{10{,}0} = 4{,}20 \text{ tm} \quad \text{ist.}$$

Um den Kräfteplan (Abb. 131d) zu finden, verbindet man zunächst die Wendepunkte W_2 und W_3 der beiden unbelasteten Rahmenstäbe und erhält damit den Schnittpunkt F mit der Kraft W. Die Linie FW_1 bestimmt nun die Richtung und Lage der linken Kämpferkraft K_l, die Linie W_2W_3 dagegen die Richtung und Lage der rechten Kämpferkraft K_r. Die Größe dieser Kräfte ergibt sich aus dem Kräfteplan der Abb. 132d. Zieht man durch den Endpunkt a der Laststrecke W eine Parallele zu W_2W_3 und durch den anderen Endpunkt b eine Parallele zu W_1F, so erhält man als Schnittpunkt den Pol c und durch das Lot in diesem den Polabstand cd.

Die Querkraft und die Längskraft für einen beliebigen Punkt m_1 des belasteten Pfostens AD unterhalb der Last findet man folgendermaßen:

Die Zerlegung der Mittelkraft K_l im Punkt m'_1 in ihre beiden Seitenkräfte H_1 und V_1 ergibt die Querkraft $Q_1 = H_1 = H_l$ und die Längskraft $N_1 = V_1 = V_l$, deren Größen bd und dc aus dem Kräfteplan zu ent-

nehmen sind. Für den wagerechten Schnitt durch einen oberhalb des Lastpunktes E gelegenen Punktes m_2 setzt sich die Mittelkraft zusammen aus den beiden Kräften unterhalb des Schnittes, nämlich W und K_l zu der Mittelkraft $ac = K_r$ im Kräfteplan. Durch die Zerlegung von K_r im Punkt m'_2 erhält man die Seitenkräfte H_2 und V_2, so daß sich in ähnlicher Weise wie vorher als Querkraft $Q_2 = H_2 = H_r$ und als Längskraft $N_2 = V_2 = V_r = -V_l$ ergibt. Der Richtungssinn dieser Kräfte ist also umgekehrt, wie er in Abb. 131b zunächst angenommen war. Für alle Punkte des Balkens AB und des rechten Pfostens BC kommen weitere äußere Kräfte nicht hinzu, demnach sind z. B. für die durch die Lote aus m_2' getroffenen Punkte m_3 und m_4 der Abb. 131b

die Querkräfte $Q_3 = V_2 = V_r$; $\quad Q_4 = H_2 = H_r$,

und die Längskräfte $N_3 = H_2 = H_r$; $\quad N_4 = V_2 = V_r$

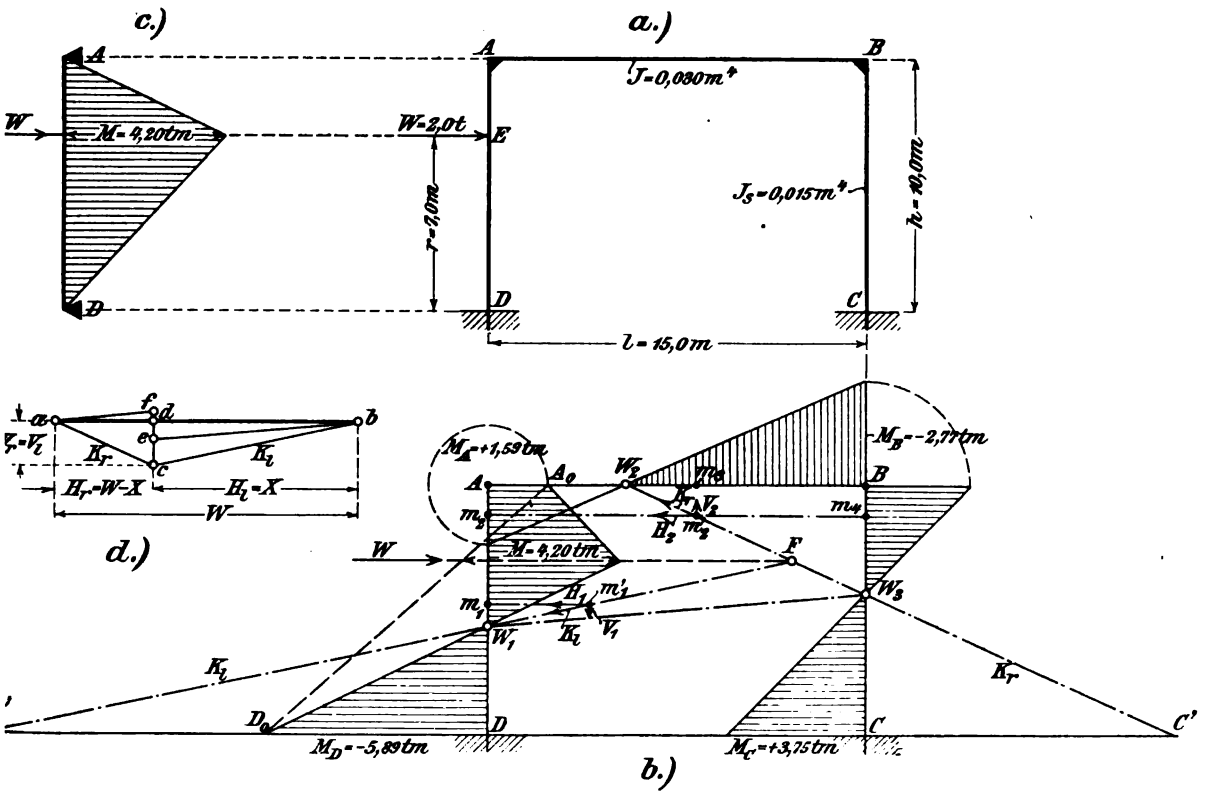


Abb. 131.

3. Die Stützkräfte, welche außer den Einspannungsmomenten M_C und M_D an den Pfostenfüßen durch die Belastung hervorgerufen werden, bestehen aus den beiden lotrechten Kräften, der Zugkraft A und der Druckkraft B, sowie den wagerechten Kräften, die mit X und $W - X$ bezeichnet werden können (s. auch Abb. 90 S. 73). Die Größe X ist der sonst als statisch unbestimmbare Größe eingeführte wagerechte Rahmen-

schub. Zerlegt man die beiden Kämpferkräfte K_l und K_r zunächst in den Schnittpunkten D' und C' mit den beiden wagerechten Stützenkräften, so findet man aus dem Kräfteplan (Abb. 131d) als wagerechte Seitenkraft von K_l die Kraft $bd = H_l = X$ und von K_r die Kraft $da = H_r = W - X$. Die zugehörigen lotrechten Seitenkräfte sind

$$dc = V_l = A' \text{ und } cd = V_r = B'.$$

In ähnlicher Weise kann man die Kämpferkräfte in den Schnittpunkten W_1 und W_3 mit den lotrechten Stützkräften A und B zerlegen und zwar in der Richtung der Verbindungslinie $W_1 W_3$ beider Punkte. Zieht man im Kräfteplan zu dieser Richtung je eine Parallele durch die Punkte b und a, welche die Lotrechte cd in den Punkten e und f treffen, so erhält man durch Zerlegung von K_l die Seitenkräfte $be = H'_l$ und $ec = A$, sowie aus K_r die Seitenkräfte $fa = H_r'$ und $cf = B$. Der Unterschied der beiden lotrechten Stützkräfte ist die Strecke $ef = B - A = Y$, die sonst in der Regel als die zweite statisch unbestimmbare Größe in die Rechnung eingeführt wird.

Bemerkenswert ist der Vergleich dieses Belastungsfalles mit dem der Abb. 90 (S. 73). In ähnlicher Weise wie dort sind hier $V_l = A'$ und $V_r = B'$ die Stützendrücke eines einfachen, statisch bestimmten Hauptnetzes, das dort aus dem Balken auf zwei Stützen (Abb. 90d), hier jedoch aus einem Dreigelenkbogen $D' F C'$ besteht.

B. Ergänzung der Rahmenformeln.

1. Rahmen mit Kragarm.

Bei dem fest angespannten Rahmen der Abb. 132a möge der Balken über die Stütze A hinaus verlängert sein und am Ende dieses so entstandenen Kragarms AE eine Einzellast P tragen.

Die Momentenfläche des einfachen Balkens $E' A' B'$ auf zwei Stützen (Abb. 132b) ist ein Dreieck mit der Höhe $\mathfrak{M} = -P \cdot c$ über der Stütze A'. Die Ableitung der Werte des Einspannungsgrades ist in derselben Weise vorzunehmen, wie es auf Seite 37 für den Fall geschehen ist, daß die Einzellast nach Abb. 54 zwischen den Stützen A und B liegt, nur tritt an Stelle der positiven, dreieckigen Momentfläche der Abb. 54c mit der Spitze über P hier die negative Dreiecksfläche $A' A'' B'$ mit der Spitze über A. Wir können daher aus den allgemeinen Formeln 8a bis 8d (S. 38 und 39) die gesuchten Werte der Einspannungsgrade ohne weiteres dadurch finden, daß $a = 0$, also auch $\xi = \frac{a}{l} = 0$ gesetzt wird. Damit ergeben sich die Werte der Einspannungsgrade für den Belastungsfall der Abb. 132a:

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= -\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{2\beta_2} \\ \mu_B &= -\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{2\beta_2} \\ \mu_C &= +\frac{1}{2\alpha_2} + \frac{1}{2\beta_2} \\ \mu_D &= +\frac{1}{2\alpha_2} - \frac{1}{2\beta_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 8')$$

Obwohl hier die Momentenfläche im Gegensatz zu Abb. 54c negativ ist, lassen sich doch auch in diesem Falle ohne weiteres die früher abgeleiteten Formeln 8 für den Einspannungsgrad verwenden, weil nach Seite 38 sowohl die statisch unbestimmbaren Größen X, Y, Z, als auch die Eckmomente M mit dem Faktor $\mathfrak{M}_m$ behaftet sind, der sich in dem Ausdruck für $\mu = \frac{M}{\mathfrak{M}_m}$ herausheben. Die Werte der Einspannungsgrade sind somit unabhängig vom Vorzeichen der Momentenfläche des einfachen Balkens.

Mit den μ-Werten der Gleichung 8′ sind die Eckmomente $M = \mu \cdot \mathfrak{M}$ zu berechnen und in Abb. 132c aufzutragen. Infolge des negativen Vorzeichens von $\mathfrak{M}$ erhält man für die Eckmomente M die entgegengesetzten Vorzeichen wie bei einer positiven Momentenfläche des statisch bestimmten Balkens (vergl. z. B. Abb. 90c, S. 73). An die als Schlußlinie zu betrachtende Gerade A_0' B_0' ist nunmehr die Fläche A' A'' B' der Abb. 132b anzusetzen, so daß sich die endgültige Momentverteilung im Balken $A\,B$ durch die Linie A_0'' B_0' bestimmt. Für den Kragarm $A\,E$ bleibt natürlich die Fläche $A\,A''\,E$ wie in Abb. 132b bestehen.

Die Mittelkraftlinie erhält man nach Abb. 132d dadurch, daß man $W_3 W_2$ bis zum Schnittpunkt E_0 mit der

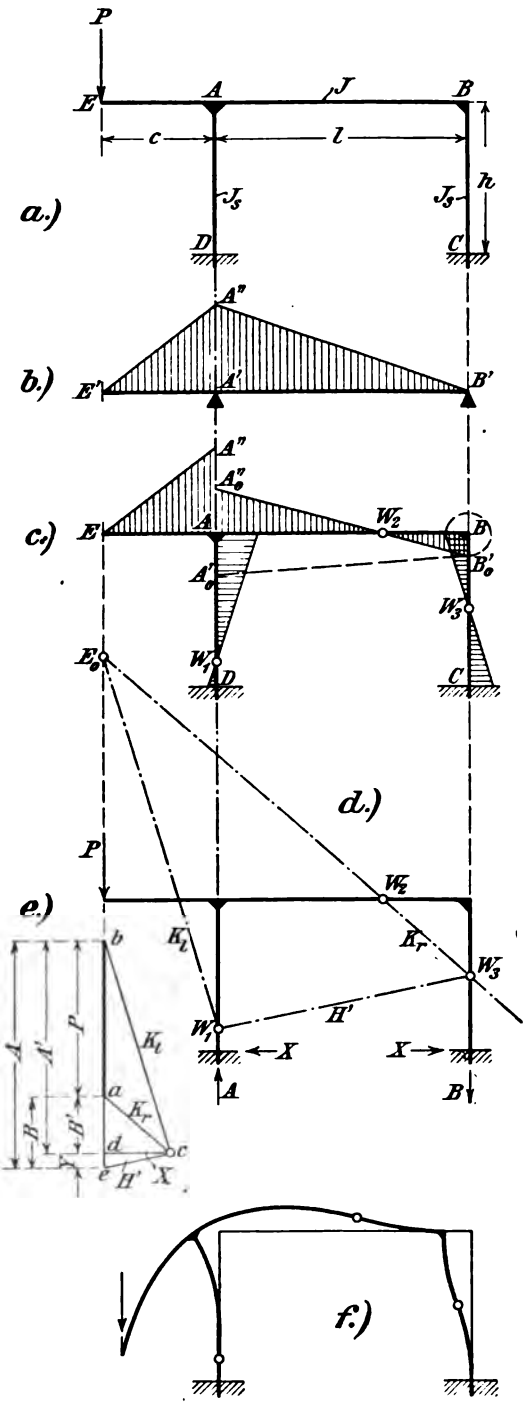


Abb. 132.

Kraft P verlängert und $E_0 W_1$ zieht. Der zugehörige Kräfteplan (Abb. 132e) ergibt sich sodann genau in derselben Weise, wie in Abb. 90b (S. 73), wobei wiederum A' und B' die Stützendrücke des einfachen Balkens $A'B'$ der Abb. 132b, A und B dagegen die des festen Rahmens sind. Hierbei ist nur das negative Vorzeichen der Zugkräfte B und B' zu beachten.

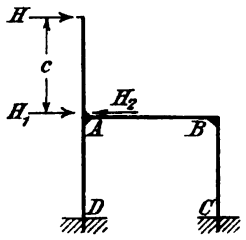


Abb. 133.

Schließlich ist in Abb. 132f nach den Anleitungen auf S. 87 und 129 noch die Biegelinie des Rahmens gezeichnet worden. Während bei allen bisher betrachteten Beispielen (vergl. Abb. 92 bis 103, S. 78 bis 83) jeweils die beiden in einer Rahmenecke zusammenstoßenden Stäbe daselbst den gleichen positiven oder negativen Krümmungssinn aufweisen, entsteht hier bei der Ecke A die einem Adlerschnabel ähnliche Form. Diese Gestalt der Biegelinie ist nur dann möglich, wenn die Biegungsmomente der beiden zusammenstoßenden Stäbe entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn also an der Ecke selbst ein von außen einwirkendes Biegungsmoment hinzutritt.

Ist der Kragarm nicht durch eine Verlängerung des Balkens AB, sondern z. B. nach Abb. 133 durch die Verlängerung des Pfostens AD entstanden, so sind am Punkte A zwei gleich große, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte $H_1 = H_2 = H$ anzubringen. Das Kräftepaar H und H_2 erzeugt sodann das im Punkt A angreifende Kragmoment $\mathfrak{M} = H \cdot c$, während die Kraft H_1 als äußere wagerechte Kraft im Punkt A übrig bleibt. Für dieses Kragmoment $\mathfrak{M}$ ist die Berechnung unter Berücksichtigung des Vorzeichens genau so durchzuführen, wie nach Abb. 132, da für die Wirkung des Momentes die Richtung des Kragarmes gleichgültig ist. Für die Kraft H_1 im Punkt A gelten dagegen die Formeln 12 der Zusammenstellung.

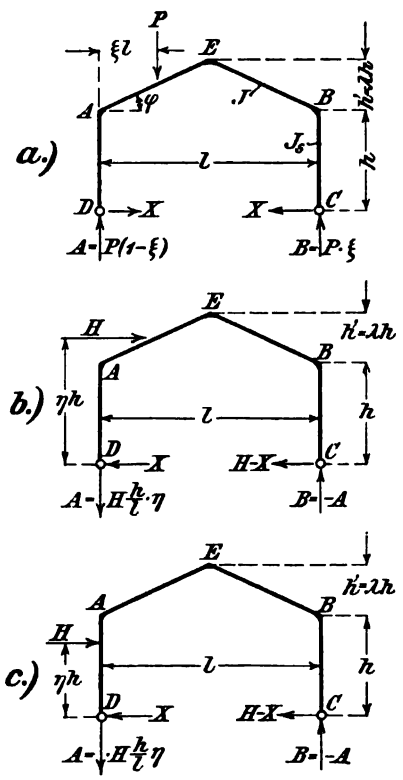


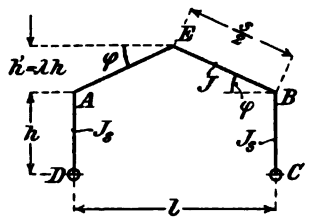
Abb. 134.

Die Durchführung einer solchen Berechnung ist im Beispiel IV gezeigt.

2. Gelenkrahmen mit geknickter Balkenachse.

Da bei Dachbindern aus Eisenbeton die Form des Rahmenbalkens AB sich der Dachneigung leicht anpassen kann, wird der Binder häufig in

Uebersicht I. Gelenkrahmen mit geknickter Balkenachse.



$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} \cdot \cos\varphi = \frac{h}{s} \cdot \frac{J}{J_s}$$

$$\alpha = 2\nu + 3 + \lambda(3+\lambda)$$

$$\lambda = \frac{h'}{h}$$

Lastbild	Vergleichsmoment $\mathfrak{M}$	μ_B	μ_A
19	$Pl\xi(1-\xi)$	$-\frac{1}{2\alpha}\left(3+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{3-4\xi^2}{1-\xi}\right)$	$\mu_A = \mu_B$
19a	$Pl\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2\alpha}(3+2\lambda)$	
19b	$-Pc$	$-\frac{1}{2\alpha}\left(3+\frac{3}{2}\lambda\right)$	
19c	$\frac{Pl}{8}=\frac{pl^2}{16}$	$-\frac{1}{2\alpha}\left(4+\frac{5}{2}\lambda\right)$	
19d	$\frac{Pl}{8}=\frac{pl^2}{8}$	$-\frac{1}{2\alpha}(4+2\lambda)$	
20	$-Pr=-Ph\eta$	$\frac{1}{4\alpha}\left(6+3\lambda+\frac{4\nu}{\eta}-\frac{2-3\eta+\eta^3}{\eta\lambda}\right)$	$\mu_A = \mu_B - 1$
20a	$-P(h+h')$	$\frac{1}{2(1+\lambda)}$	
20b	$-Ph$	$\frac{1}{4\alpha}(6+3\lambda+4\nu)$	
20c	$-P\left(h+\frac{h'}{2}\right)$	$\frac{1}{2+\lambda}-\frac{\lambda}{8\alpha}\cdot\frac{4+3\lambda}{2+\lambda}$	
21	$-Ph\eta$	$\frac{1}{4\alpha}[6+3\lambda+2\nu(3-\eta^2)]$	
21a	$-Ph\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4\alpha}(6+3\lambda+5\nu)$	

der Grundform der Abb. 134a mit geknicktem Balken AEB ausgebildet. Es mögen daher die für diesen Fall anzuwendenden Formeln für den Einspannungsgrad hier gegeben werden, wobei wir uns jetzt der Einfachheit halber auf den Gelenkrahmen beschränken. Der Rechnungsgang ist genau in derselben Weise durchzuführen, wie z. B. S. 32ff. dargelegt wurde, so daß auf seine Wiedergabe hier verzichtet werden kann.

In Abb. 134a bis c sind zunächst die drei allgemeinen Belastungsfälle dargestellt. Hierbei ist mit h die Pfostenhöhe, mit h' die Dachhöhe

und mit φ die Dachneigung bezeichnet. Im Vergleich zu den Gleichungen 1 bis 7 tritt hier noch der Wert $\lambda = \frac{h'}{h}$ auf. Wird $\lambda = 0$ gesetzt, also auch $h' = \lambda h = 0$, so geht die geknickte Balkenachse AEB in die Gerade AB über. Durch Einführen von $\lambda = 0$ in die Gleichungen der Uebersicht S. 115 erhält man daher zur Probe die entsprechenden Gleichungen 1 bis 7 der Zusammenstellung am Schluß.

Die Durchführung der Rechnung für die drei allgemeinen Belastungsfälle ergibt die folgenden Gleichungen für die Einspannungsgrade.

Nach Abb. 134a mit einer lotrechten Einzellast auf dem Balken wird:

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{3}{2\alpha} - \frac{\lambda}{4\alpha} \cdot \frac{3 - 4\xi^2}{1 - \xi} \quad \ldots \quad 19)$$

Nach Abb. 134b mit einer wagerechten Einzellast auf dem Balken wird:

$$\mu_B = +\frac{3}{4} \cdot \frac{3 + \lambda}{\alpha} + \frac{4\nu - 2 - \eta^3}{4\alpha\eta} \quad \ldots \quad 20)$$

Nach Abb. 134c mit einer wagerechten Einzellast auf dem Pfosten wird:

$$\mu_B = +\frac{3}{4} \cdot \frac{2 + \lambda}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha} \cdot \frac{3 - \eta^2}{2} \quad \ldots \quad 21)$$

Während bei senkrechter Belastung des Gelenkrahmens $\mu_A = \mu_B$ ist, erhält man in den beiden letzteren Fällen mit wagerechter Belastung des Rahmens nach Gleichung IIa (S. 53)

$$\mu_A = \mu_B - 1.$$

In diesen Ausdrücken sind die Bezeichnungen

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} \cos\varphi \text{ und } \alpha = 2\nu + 3 + \lambda(3 + \lambda)$$

eingeführt, die für $\varphi = 0$ oder $\lambda = 0$, also für den Gelenkrahmen mit geradem Balken in die Werte ν und α_1 der Zusammenstellung am Schlusse übergehen.

Auf S. 115 sind die Rechnungsergebnisse für eine Anzahl besonderer Belastungsfälle zusammengestellt, die für Dachbinder von Bedeutung sind. Sie ergeben sich ohne weiteres in genau derselben Weise wie auf S. 34 aus den Gleichungen 19, 20 und 21. Hierbei ist nur zu beachten, daß bei der Gleichung 19b für den Fall gleichförmig verteilter Belastung einer Balkenhälfte als Vergleichsmoment der Wert

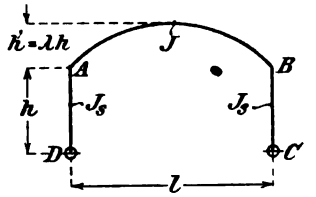
$$\mathfrak{M} = \frac{pl^2}{16} = \frac{Pl}{8}$$

also das Biegungsmoment in Balkenmitte einzusetzen ist.

8. Gelenkrahmen mit gekrümmter Balkenachse.

Aehnlich wie die soeben betrachtete Grundform wird auch der Rahmenbinder mit gekrümmter Balkenachse (Abb. 135a) häufig angewandt, so daß für diesen ebenfalls die Werte der Einspannungsgrade hergeleitet wurden, die in der Uebersicht auf S. 117 zusammengestellt sind. Der Rechnungsgang ist durchaus der gleiche wie beim Gelenkrahmen mit geknickter Balkenachse, nur ist zur Vereinfachung der Rechnung an-

Uebersicht II. Gelenkrahmen mit gekrümmter Balkenachse.



$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s}$$

$$\alpha = 2\nu + 3 + 4\lambda\left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right)$$

Lastbild	Vergleichsmoment $\mathfrak{M}$	μ_B	μ_A
22	$Pl\,\xi\,(1-\xi)$	$-\frac{1}{2\alpha}[3+2\lambda(1+\xi-\xi^2)]$	$\mu_A = \mu_B$
22a	$\frac{Pl}{4}$	$-\frac{1}{2\alpha}\left(3+\frac{5}{2}\lambda\right)$	
22b	$-Pc$	$-\frac{1}{2\alpha}(3+2\lambda)$	
22c	$\frac{Pl}{8} = \frac{pl^2}{16}$	$-\frac{1}{2\alpha}\left(4+\frac{16}{5}\lambda\right)$	
22d	$\frac{Pl}{8} = \frac{pl^2}{8}$	$-\frac{1}{2\alpha}\left(4+\frac{16}{5}\lambda\right)$	
23	$-Wr = -Wh\eta$		$\mu_A = \mu_B - 1$
23a	$-Wh(1+\lambda)$ $= -W(h+h')$	$+\frac{1}{2(1+\lambda)}$	
23b	$-Wh$	$+\frac{1}{2\alpha}(2\nu+3+2\lambda)$	
23c	$-W\left(h+\frac{h'}{2}\right)$ $= -Wh\frac{2+\lambda}{2}$	$+\frac{1}{2\alpha}(2\nu+3+3{,}3\lambda+\lambda^2)\frac{2}{2+\lambda}$	
24	$-Wr = -Wh\eta$	$+\frac{1}{2\alpha}[\nu(3-\eta^2)+3+2\lambda]$	
24a	$-W\frac{h}{2}$	$+\frac{1}{4\alpha}(5\nu+6+4\lambda)$	

genommen, daß die Balkenachse nach einer Parabel gekrümmt sei und daß ferner nach Abb. 135b das Trägheitsmoment des Balkens von der Mitte aus nach den Ecken zu in umgekehrtem Verhältnis von cos φ sich ändern, daß also

$$\frac{J}{J_x} = \frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

sein möge. Diese Annahme ist umsomehr berechtigt. als bei der Grundform der Abb. 135 in der Regel der Balkenquerschnitt von der Mitte nach den Rahmenecken zunimmt.

Aus der Zusammenstellung (S. 117) sind die μ-Werte für die wichtigsten Belastungsfälle zu entnehmen. Dabei ist

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} \text{ und } \alpha = 2\nu + 3 + 4\lambda\left(1 + \frac{2}{5}\eta\right).$$

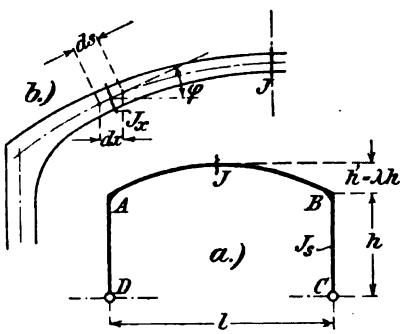


Abb. 135.

Auch hier gehen für $\lambda = 0$, also für eine gestreckte Balkenachse die Nennerwerte α, sowie die sämtlichen μ-Werte in die entsprechenden Ausdrücke der Zusammenstellung am Schluß über.

Zu dem Fall einer wagerechten Belastung auf den gekrümmten Balken sei bemerkt, daß von der Wiedergabe der verwickelten Gleichung für eine Einzelkraft W in beliebiger Höhe abgesehen wurde. Da die Verteilung der Windkräfte auf eine gekrümmte Dachfläche ohnehin zuverlässig nicht angegeben werden kann, so darf mit genügender Annäherung nach Gleichung 23c die gesamte wagerechte Seitenkraft des Winddrucks auf die gekrümmte Dachfläche in halber Dachhöhe wirkend angenommen werden.

4. Gelenkrahmen mit ungleich hohen und verschieden steifen Pfosten.

Während bisher nur vollkommen symmetrisch gestaltete Rahmen betrachtet worden sind, soll hier noch die Gleichung für den Einspannungs-

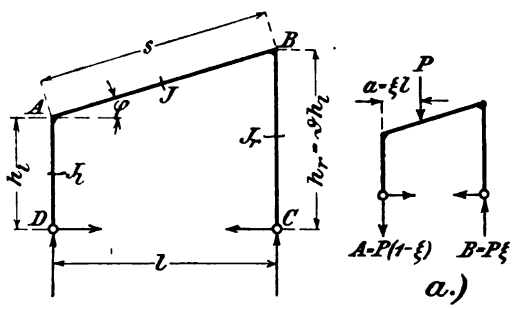


Abb. 136.

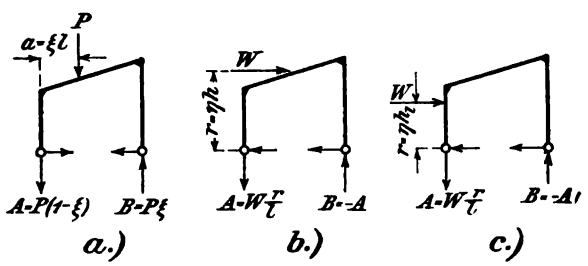
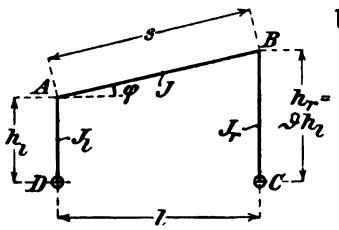


Abb. 136a bis c.

grad eines Dreigelenkrahmens mit ungleich hohen und verschieden steifen Pfosten (Abb. 136) ermittelt werden. Der Rechnungsgang ist genau so wie bisher, nur treten hier an Stelle des Trägheitsmomentes J_s die beiden verschiedenen Trägheitsmomente J_l und J_r und an Stelle der Pfostenhöhe h die beiden verschiedenen Höhen h_l und h_r auf. Wir führen die Bezeichnung ein:

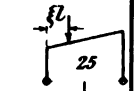
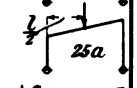
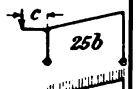
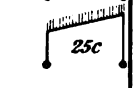
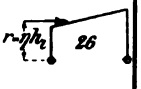
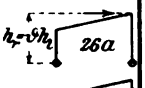
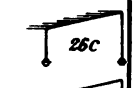
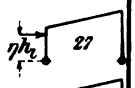
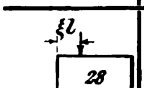
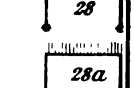
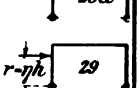
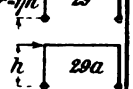
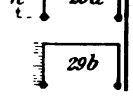
$$\nu_l = \frac{h_l}{s} \cdot \frac{J}{J_l} \quad \text{und} \quad \nu_r = \frac{h_r^2}{s h_l^2} \cdot \frac{J}{J_r},$$



Uebersicht III. Gelenkrahmen mit ungleich hohen und verschieden steifen Pfosten.

$$\nu_l = \frac{h_l}{s} \cdot \frac{J}{J_l} \qquad \nu_r = \frac{h_r^3}{s h_l^2} \cdot \frac{J}{J_r} \qquad \vartheta = \frac{h_r}{h_l}$$

$$\alpha = \nu_l + \nu_r + \vartheta^2 + \vartheta + 1$$

Lastbild	Vergleichsmoment $\mathfrak{M}$	μ_A	μ_B
 25	$Pl\xi(1-\xi)$	$-\frac{1}{2\alpha}[\vartheta+2+\xi(\vartheta-1)]$	$-\frac{\vartheta}{2\alpha}[\vartheta+2+\xi(\vartheta-1)]$
 25a	$Pl\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4\alpha}(\vartheta+1)$	$-\frac{3\vartheta}{4\alpha}(\vartheta+1)$
 25b	$-P\cdot c$	$-\frac{1}{2\alpha}(\vartheta+2)$	$-\frac{\vartheta}{2\alpha}(\vartheta+2)$
 25c	$\frac{pl^2}{8}$	$-\frac{1}{\alpha}(\vartheta+1)$	$-\frac{\vartheta}{\alpha}(\vartheta+1)$
 26	$-Wr$	$-\frac{\nu_r}{\alpha\eta}-\frac{2\vartheta^3+\eta^3-\eta(\vartheta^2+\vartheta+1)}{2\alpha\eta\cdot(\vartheta-1)}$	$\frac{\nu_l\vartheta}{\alpha\eta}-\frac{(2+\eta^3)\vartheta+(\vartheta^2+\vartheta+1)\cdot\vartheta}{2\alpha\eta(\vartheta-1)}$
 26a	$-Wh_r$	$-\frac{1}{2\alpha\vartheta}[2\nu_r+\vartheta(2\vartheta+1)]$	$+\frac{1}{2\alpha}(2\nu_l+\vartheta+2)$
26b	$-Wh_l$	$-\frac{1}{2\alpha}[2\nu_r+\vartheta(2\vartheta+1)]$	$+\frac{\vartheta}{2\alpha}(2\nu_l+\vartheta+2)$
 26c	$-W\frac{h_l+h_r}{2}$	$-\frac{1}{4\alpha(\vartheta+1)}[8\nu_r+7\vartheta^2+4\vartheta+1]$	$+\frac{\vartheta}{4\alpha(\vartheta+1)}(8\nu_l+\vartheta^2+4\vartheta+7)$
 27	$-Wr$	$-\frac{2\nu_r-\nu_l(1-\eta^3)+\vartheta(2\vartheta+1)}{2\alpha}$	$+\frac{\vartheta}{2\alpha}[\nu_l(3-\eta^3)+\vartheta+2]$
27a	$-W\frac{h_l}{2}$	$-\frac{1}{4\alpha}[4\nu_r-\nu_l+2\vartheta(2\vartheta+1)]$	$+\frac{\vartheta}{4\alpha}[5\nu_l+2(\vartheta+2)]$
 28	$Pl\xi(1-\xi)$	$-\frac{3}{2\alpha}$	$-\frac{3}{2\alpha}$
 28a	$\frac{pl^2}{8}$	$-\frac{2}{\alpha}$	$-\frac{2}{\alpha}$
 29	$-Wr$	$-\frac{1}{2\alpha}[2\nu_r-\nu_l(1-\eta^2)+3]$	$+\frac{1}{2\alpha}[\nu_l(3-\eta^2)+3]$
 29a	$-Wh$	$-\frac{1}{2\alpha}(2\nu_r+3)$	$+\frac{1}{2\alpha}(2\nu_l+3)$
 29b	$-W\frac{h}{2}$	$-\frac{1}{4\alpha}(4\nu_r-\nu_l+6)$	$+\frac{1}{4\alpha}(5\nu_l+6)$

$\nu_r = \frac{h}{l}\cdot\frac{J}{J_r}$, $\nu_l = \frac{h}{l}\cdot\frac{J}{J_l}$, $\alpha = \nu_l + \nu_r + 3$

wenn $s = \frac{l}{\cos\varphi}$ die Länge des Balkens und $\vartheta = \frac{h_r}{h_l}$ bedeutet, ferner

$$\alpha = \nu_l + \nu_r + \vartheta^2 + \vartheta + 1$$

und erhält dann für den Fall einer lotrechten Einzellast auf dem Balken (Abb. 136a) das überraschend einfache Ergebnis der Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= -\frac{1}{2\alpha}[\vartheta + 2 + \xi(\vartheta - 1)] \\ \mu_B &= -\frac{\vartheta}{2\alpha}[\vartheta + 2 + \xi(\vartheta - 1)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 25)$$

In ähnlicher Weise wird für eine auf den Balken wirkende wagerechte Einzellast (Abb. 136b)

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= -\frac{1}{2\alpha\eta}\left[2\nu_r + \frac{2\vartheta^3 + \eta^3 - \eta(\vartheta^2 + \vartheta + 1)}{\vartheta - 1}\right] \\ \mu_B &= +\frac{\vartheta}{2\alpha\eta}\left[2\nu_l - \frac{2 + \eta^3 - \eta(\vartheta^2 + \vartheta + 1)}{\vartheta - 1}\right] \end{aligned}\right\} 26)$$

und für eine auf den Pfosten wirkende wagerechte Einzellast (Abb. 136c)

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= -\frac{1}{2\alpha}\left[2\nu_r - \nu_l(1 - \eta^2) + \vartheta\,(2\vartheta + 1)\right] \\ \mu_B &= +\frac{\vartheta}{2\alpha}\left[\nu_l(3 - \eta^2) + \vartheta + 2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots 27)$$

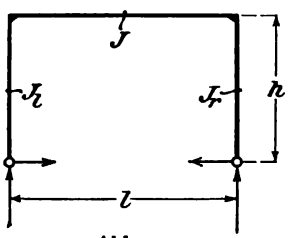


Abb. 137.

Für weitere Sonderfälle sind die aus diesen 3 Gleichungen sich ergebenden Werte für μ auf Seite 119 zusammengestellt.

Setzt man in diesen Gleichungen $h_l = h_r = h$, also $\vartheta = 1$, so erhält man damit den rechteckigen Gelenkrahmen der Abb. 137 mit verschieden steifen Pfosten. Für diesen wird daher

$$\alpha = \nu_l + \nu_r + 3$$

und damit z. B. aus Gleichung 25

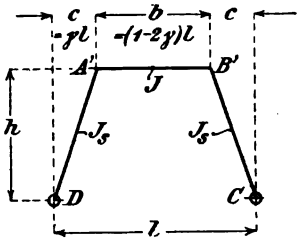
$$\mu_A = -\frac{3}{2\alpha} = \mu_B \quad \ldots\ldots\ldots 28)$$

Diese Gleichung hat also dieselbe Form wie die entsprechende Gleichung 1 beim symmetrischen Rahmen, nur ist dabei der andere α-Wert zu beachten.

In ähnlicher Weise ergeben sich aus den Gleichungen 26 u. 27 die entsprechenden Werte 28 u. 29 der Zusammenstellung auf Seite 119, die mit den Gleichungen 3, 4 und 6 der Zusammenstellung am Schluß übereinstimmen.

Setzt man zur Probe hierin weiter noch $\nu_l = \nu_r = \nu$, so wird $\alpha = 3 + 2\nu = \alpha_1$, und man erhält damit die gleichen Werte wie in der Zusammenstellung am Schlusse.

Uebersicht IV. Gelenkrahmen mit schrägstehenden Pfosten.



$$\nu = \frac{s}{b} \cdot \frac{J}{J_s}$$

$$s = A'D = B'C = \sqrt{c^2 + h^2}$$

$$\alpha = 2\nu + 3$$

Lastbild	Vergleichsmoment $\mathfrak{M}$	Rahmenschub X bei C	$\mu_{A,B}$
30	$P\frac{x(b-x)}{b}$	$\frac{3\mathfrak{M}}{2\alpha h} + \frac{Pc}{2h}$	$-\frac{3}{2\alpha} \mp \frac{cb}{2lx} \cdot \frac{b-2x}{b-x}$
30a	$P\frac{b}{4}$	$\frac{3\mathfrak{M}}{2\alpha h} + \frac{Pc}{2h}$	$-\frac{3}{2\alpha}$
30b	$\frac{Pb}{8}$	$\frac{2\mathfrak{M}}{\alpha h} + \frac{Pc}{2h}$	$-\frac{2}{\alpha}$
31	Px	$\frac{\mathfrak{M}}{2h}\left[1 + \frac{\nu}{\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)\right]$	$-\frac{\nu}{2\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) \pm \frac{b}{2l}$
31a	Pc	$\frac{\mathfrak{M}}{2h} = \frac{Pc}{2h}$	$\pm\frac{b}{2l}$
31b	$P\frac{c}{2}$	$\frac{\mathfrak{M}}{2h}\left(1 + \frac{\nu}{2\alpha}\right)$	$-\frac{\nu}{4\alpha} \pm \frac{b}{2l}$
32	$-Wy$	$\frac{\mathfrak{M}}{2h}\left[1 + \frac{\nu}{\alpha}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)\right]$	$+\frac{\nu}{2\alpha}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \mp \frac{b}{2l}$
32a	$-Wh$	$\frac{\mathfrak{M}}{2h} = \frac{W}{2}$	$\mp\frac{b}{2l}$
32b	$-W\frac{h}{2}$	$\frac{\mathfrak{M}}{2h}\left(1 + \frac{\nu}{2\alpha}\right)$	$+\frac{\nu}{4\alpha} \mp \frac{b}{2l}$

Die oberen Vorzeichen gelten für μ_A, die unteren für μ_B.

5. Gelenkrahmen mit schrägstehenden Pfosten.

Bei der in Abb. 138 dargestellten Rahmenform, die häufig für Dachbauten angewendet wird, treten an Stelle der senkrechten Pfosten AD und BC die geneigten Pfosten $A'D$ und $B'C$ mit der Länge $s = \sqrt{c^2 + h^2}$.

Ähnlich wie bisher setzen wir $\nu = \frac{s \cdot J}{b \cdot J_s}$, ferner $\alpha = 2\nu + 3$, wobei hier ebenfalls ν das Verhältnis der für die Steifigkeit des Pfostens und des Balkens maßgebenden Werte $\frac{s}{J_s}$ und $\frac{b}{J}$ bedeutet. Wie bei dem Rechnungsgange der bisherigen Beispiele für den Gelenkrahmen ergeben sich die in der Über-

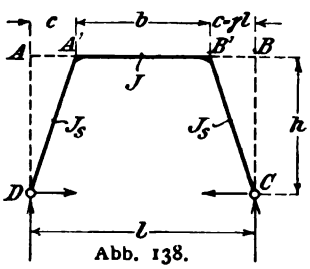


Abb. 138.

sicht 4 (S. 121) angeführten μ-Werte, bei denen die oberen Vorzeichen für μ_A, die unteren Vorzeichen für μ_B gelten, so daß man wiederum die Eckmomente $M = \mu \cdot \mathfrak{M}$ in der üblichen Weise erhält.

Hierbei ist zu beachten, daß die Vergleichsmomente $\mathfrak{M}$ für die Belastung des Balkens nicht wie bisher auf die Rahmenstützweite l, sondern auf die Länge b des Balkens $A'B'$ bezogen sind (Abb. 138). Für die lotrechte Belastung des schrägstehenden Pfostens dagegen ist als Vergleichsmoment nach Abb. 31, 31a und b der Übersicht 4 das statische Moment der Last in bezug auf den Fußpunkt des Pfostens eingeführt worden, das dieselbe Bedeutung hat wie das Kragmoment $\mathfrak{M}_K$ bei wagerechter Belastung des Pfostens (Abb. 32, 32a und b). Aus diesem Grunde unterscheiden sich daher auch die einander entsprechenden Gleichungen 31 und 32 nur durch das Verhältnis $\frac{x}{c}$ und $\frac{y}{h}$, während 31a und 32a sowie 31b und 32b gleich sind.

Um die Auftragung der Mittelkraftlinie und die Ermittlung der Stützkräfte zu erleichtern, sind hier ausnahmsweise noch die Gleichungen für den Rahmenschub X am unbelasteten Pfosten gegeben, da sich dieselben nicht in so einfacher Weise aus den Eckmomenten berechnen lassen wie bei den Rahmen mit lotrechten Pfosten.

Setzt man in den Ausdrücken der Übersicht 4 die Strecken $b = l$ und $s = h$, also $c = 0$ ein, so sieht man zur Probe, daß die Gleichungen für μ in die entsprechenden Gleichungen der Zusammenstellung am Schlusse übergeben.

6. Vierseitige Rahmen.

Der vierseitige Rahmen findet hauptsächlich für Durchlässe und Unterführungen Anwendung. Weitere Anwendungsmöglichkeiten, die bisher verhältnismäßig wenig ausgenutzt worden sind, bieten sich aber dadurch, daß der vierseitige Rahmen auch zur Aufnahme wagerechter Kräfte geeignet ist und daher als Widerlager für Bogen- und Balkenträger dienen kann. In Abb. 139a stützt sich z. B. der Bogen einer gewölbten Brücke oder eines Hallendaches gegen zwei solche Rahmenwiderlager. Auch für die Bogenreihe eines Wasserbehälters aus Stampfbeton kann der vierseitige Rahmen als Endwiderlager dienen (Abb. 139b). Endlich kann der vierseitige Rahmen mit

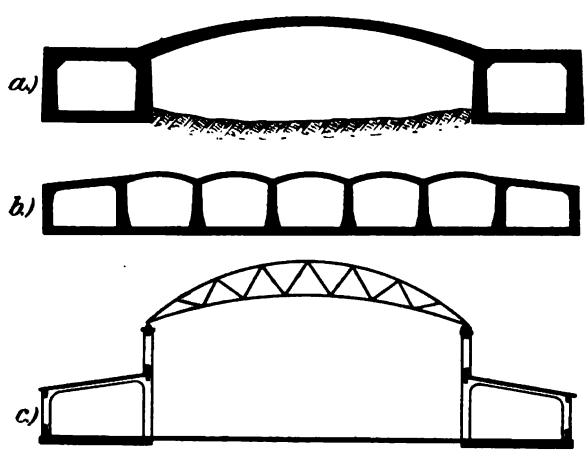
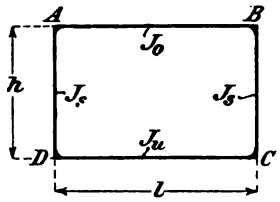


Abb. 139.



Uebersicht V. Vierseitiger Rahmen.

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_o}{J_s}; \quad \omega = \frac{J_o}{J_u} \qquad \beta = 6\nu + 1 + \omega$$

$$\alpha = \nu^2 + 2\nu(1+\omega) + 3\omega = \nu(\nu+2) + \omega(2\nu+3)$$

Die unteren Vorzeichen und Werte gelten für μ_B und μ_C, die oberen für μ_A und μ_D.

Lastbild	$\mathfrak{M}$	μ_A bezw. μ_B	μ_D bezw. μ_C
33	$Pl\xi(1-\xi)$	$-\frac{2\nu+3\omega}{2\alpha} \mp \frac{1-2\xi}{2\beta}$	$+\frac{\nu}{2\alpha} \mp \frac{1-2\xi}{\beta}$
33a	$Pl\frac{1}{4}$	$-\frac{2\nu+3\omega}{2\alpha}$	$+\frac{\nu}{2\alpha}$
33b	$-P\cdot c$	$-\frac{2\nu+3\omega}{2\alpha} \mp \frac{1}{2\beta}$	$+\frac{\nu}{2\alpha} \mp \frac{1}{\beta}$
33c	$Pl\frac{1}{8}$	$-\frac{2}{3}\cdot\frac{2\nu+3\omega}{\alpha}$	$+\frac{2}{3}\cdot\frac{\nu}{\alpha}$
33d	$Pl\frac{1}{8}(2-\varrho)$	$-\frac{2\nu+3\omega}{3\alpha}\cdot\frac{3-\varrho^2}{2-\varrho}$	$+\frac{\nu}{3\alpha}\cdot\frac{3-\varrho^2}{2-\varrho}$
33e	$Pl\xi$	$-\frac{2\nu+3\omega}{\alpha}\left(1-\xi-\frac{\varrho^2}{12\xi}\right)$	$+\frac{\nu}{\alpha}\left(1-\xi-\frac{\varrho^2}{12\xi}\right)$
34	$-Wh\eta$	$-\frac{\eta^2\nu}{2\alpha}(\nu+\omega)+\frac{\eta\nu}{2}\left(\frac{\nu}{\alpha}\mp\frac{3}{\beta}\right)+\frac{\omega}{2}\left(\frac{\nu}{\alpha}\mp\frac{1}{\beta}\right)$	$+\frac{\eta^2\nu}{2\alpha}(\nu+1)-\frac{\eta\nu}{2}\left(\frac{2\nu+3}{\alpha}\pm\frac{3}{\beta}\right)-\frac{\omega}{2}\left(\frac{2\nu+3}{\alpha}\pm\frac{1}{\beta}\right)+\begin{cases}+1\\+0\end{cases}$
34a	$-Wh$	$\mp\frac{3\nu+\omega}{2\beta}$	$\pm\frac{3\nu+1}{2\beta}$
34b	$-Wh\frac{1}{2}$	$+\frac{\nu}{12}\cdot\frac{\nu+3\omega}{\alpha}\mp\frac{2\nu+\omega}{2\beta}$	$\begin{cases}+\frac{\nu}{12}\cdot\frac{7\nu+15}{\alpha}\\-\frac{\nu}{12}\cdot\frac{5\nu+9}{\alpha}\end{cases}\pm\frac{\omega}{2}\cdot\frac{2\nu+3}{\alpha}\mp\frac{2\nu+\omega}{2\beta}$
34c	$-Wh\frac{1}{3}$	$+\frac{\nu}{20}\cdot\frac{2\nu+7\omega}{\alpha}\mp\frac{3\nu+2\omega}{4\beta}$	$\begin{cases}+\frac{\nu}{20}\cdot\frac{13\nu+28}{\alpha}\\-\frac{\nu}{20}\cdot\frac{7\nu+12}{\alpha}\end{cases}\pm\frac{\omega}{2}\cdot\frac{2\nu+3}{\alpha}\mp\frac{3\nu+2\omega}{4\beta}$
34d	$-Wh\frac{1}{2}$	$+\frac{\nu}{6}\cdot\frac{\nu+3\omega}{\alpha}$	$+\frac{\nu}{6}\cdot\frac{\nu+3}{\alpha}$
34e	$-Wh\frac{1}{3}$	$+\frac{\nu}{10}\cdot\frac{2\nu+7\omega}{\alpha}$	$+\frac{\nu}{10}\cdot\frac{3\nu+8}{\alpha}$
35	$-Pl\xi(1-\xi)$	$+\frac{\omega}{2}\left(\frac{\nu}{\alpha}\mp\frac{1-2\xi}{\beta}\right)$	$-\frac{\omega}{2}\left(\frac{2\nu+3}{\alpha}\pm\frac{1-2\xi}{\beta}\right)$
35a	$-Pl\frac{1}{8}$	$+\frac{2}{3}\omega\frac{\nu}{\alpha}$	$-\frac{2}{3}\omega\frac{2\nu+3}{\alpha}$
35b	$+pl^2\frac{1}{6}$	$\pm\frac{\omega}{10\beta}$	$\mp\frac{\omega}{10\beta}$

Kragarm nach Abb. 139c bei Hallenbauten für Werkstätten und Fabriken mit niedrigem Seitenschiff in Basilikaform vorteilhaft verwendet werden.

In der Abhandlung S. 45 u. f. waren zunächst nur einige besondere Belastungsfälle des vierseitigen Rahmens behandelt, weil dort vor allen Dingen zunächst der Gedankengang der Rechnung dargelegt werden sollte.

Für die Anwendung kommt noch eine größere Reihe weiterer Belastungsarten in Betracht, für welche der Vollständigkeit halber in Übersicht 5 (S. 123) die Gleichungen für die Einspannungsgrade noch gegeben werden mögen.

Zunächst wurden die drei allgemeinen Fälle 33, 34 und 35 für Einzellasten in beliebiger Stellung behandelt und aus diesen durch Annahme bestimmter Laststellungen oder durch Integration die übrigen Fälle hergeleitet.

An Stelle der Gleichungen 15, 16, 17, 18 der Zusammenstellung am Schlusse treten hier nunmehr die Gleichungen 33c, 35a, 34b und 34a, die sich von diesen nur in der für den Gebrauch bequemeren Schreibweise unterscheiden.

Beim Gebrauch dieser Formeln ist zu beachten, daß in denselben zur Vereinfachung der Schreibweise die oberen Vorzeichen für den Einspannungsgrad der linken Ecke A und D, die unteren Vorzeichen für den Einspannungsgrad der rechten Ecken B und C gelten.

C. Ergänzende Erörterungen.

1. Biegungsmomente und Querkräfte.

Die Auftragung der Biegungsmomente und Querkräfte erfolgt am zweckmäßigsten derart, daß man nach Abb. 140 die Achsen der beiden Pfosten AD und BC um die Ecken A und B in die Verlängerung der Balkenachse AB heraufklappt, so daß die Rahmenachse gerade gestreckt erscheint. An diese Gerade werden die Werte M und Q der Biegungsmomente und Querkräfte als Ordinaten angetragen.[1])

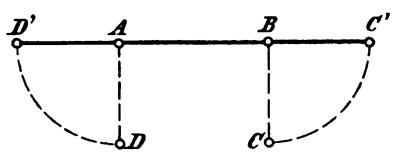


Abb. 140.

Zur Ermittlung der Querkräfte können folgende drei Verfahren angewendet werden:

1. Rechnerische Ermittlung der Querkräfte aus der Momentenlinie. Aus der bekannten Beziehung, daß der Neigungswinkel α der Momentenlinie in einem Balkenschnitt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dM}{dx} = Q,$$

[1]) Diese Darstellung gleicht also im wesentlichen der eines durchlaufenden Trägers über vier festen Stützen, unterscheidet sich von dieser jedoch in der Art der gegenseitigen Beeinflussung der Biegungsmomente und Querkräfte der einzelnen Felder. Der Unterschied ist hauptsächlich darin begründet, daß die Ecken des Rahmens sowohl in senkrechter, wie auch in wagerechter Richtung verschieblich sind, wogegen die Stützen eines durchlaufenden Trägers als feste Punkte angesehen werden.

also die Abgeleitete der Momentenlinie gleich der Querkraft in dem betreffenden Punkte ist, läßt sich die Querkraft jeweils aus der Momentenlinie berechnen. Für den Fall einer geradlinig begrenzten Momentenfläche, z. B. nach Abb. 141b, erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{M_2 - M_1}{a_2} = Q_2.$$

Wegen des Vorzeichens der Querkräfte sei folgendes hervorgehoben. Wir bezeichnen die Querkräfte dann als positiv, wenn sie nach Abb. 142a links vom Schnitt nach aufwärts oder auswärts, rechts vom Schnitt nach abwärts oder einwärts wirken. Zur Veranschaulichung denke man sich die beiden Schnittflächen um ein endliches Maß auseinandergerückt und merke sich, daß das Vorzeichen dann als positiv zu bezeichnen ist, wenn das so entstandene Kräftepaar im Uhrzeigersinne dreht. Die Tangente an die Momentenlinie ist in diesem Falle nach rechts geneigt und schließt mit der Grundlinie den positiven Winkel α ein. Bei positiver Querkraft muß daher das Biegungsmoment rechts vom Schnitt größer sein als das Moment links vom Schnitt. Bei Aufstellung der obigen Gleichung für die Querkraft ist daher stets das Moment links vom Schnitt von dem Moment rechts vom Schnitt abzuziehen.

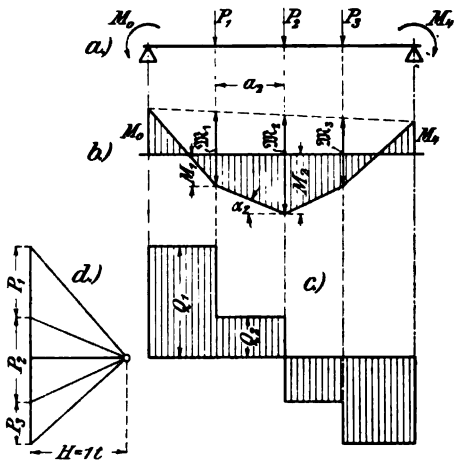


Abb. 141.

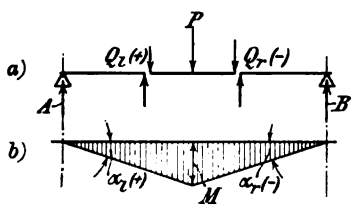


Abb. 142.

Die Querkraft Q_B an der rechten Stütze findet man einfach dadurch, daß man von der Querkraft an der linken Stütze die Summe aller auf den Stab wirkenden äußeren Kräfte abzieht, also $Q_B = Q_A - \Sigma P$.

2. Die zeichnerische Ermittlung aus den Biegungsmomenten läßt sich nach Abb. 141d mit Hilfe des Kräfteplans vornehmen, wobei der Polabstand $H = 1$ aufzutragen und die Parallelen zu den Begrenzungslinien der Momentenlinie zu ziehen sind.

3. Die Ermittlung aus der Mittelkraftlinie erfolgt nach S. 62. Man zerlegt die Mittelkraft im Schnittpunkt des senkrecht zur Balkenachse geführten Schnittes in zwei Seitenkräfte, von denen die rechtwinklig zur Balkenachse gerichtete die Querkraft ist.

Während das zeichnerische Verfahren 2. dann zu empfehlen ist, wenn eine genaue Aufzeichnung der Momentenlinie vorliegt, besonders bei verwickelten Belastungsfällen, führt das rechnerische Verfahren 1. bei einfachen und leicht zu übersehenden Belastungsfällen meist rascher zum Ziele und dient auch sonst als willkommene Stichprobe. Das dritte Verfahren endlich ist besonders bei schräg gerichteten Rahmenstäben zweckmäßig, vor allem dann, wenn auch schräg gerichtete Kräfte vorkommen wie beim Beispiel II (vergl. S. 157, Punkt II. 2 u. 5, Abb. 167 f).

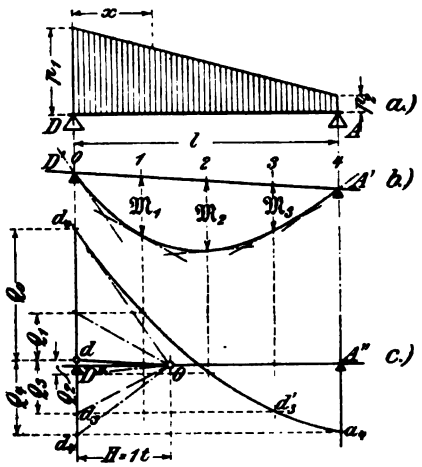


Abb. 143.

Hier möge noch der bei den Beispielen vorkommende Fall einer dreieck- oder trapezförmig verteilten Belastung kurz betrachtet werden. Für die Belastung nach Abb. 143a ist das Biegungsmoment in einem Balkenschnitt bei x:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{x(l-x)}{6l}[p_1(2l-x)+p_2(l+x)].$$

Für die Aufzeichnung der Momentenlinie nach Abb. 143b ergeben sich demnach die Ordinaten in den Viertelpunkten, also für:

$$x=\frac{1}{4}l \quad \text{zu} \quad \mathfrak{M}_1=\frac{l^2}{8}\frac{7p_1+5p_2}{16}$$

$$x=\frac{1}{2}l \quad \text{,,} \quad \mathfrak{M}_2=\frac{l^2}{8}\frac{p_1+p_2}{2}$$

$$x=\frac{3}{4}l \quad \text{,,} \quad \mathfrak{M}_3=\frac{l^2}{8}\frac{5p_1+7p_2}{16}$$

Die Neigung der Tangente an die Momentenlinie ergibt sich zu

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dM_x}{dx}=\frac{1}{6l}[p_1(2l^2-6lx+3x^2)+p_2(l^2-3x^2)]=Q.$$

Die Auftragung dieser Werte nach Abb. 143c ergibt die Querkraftlinie. Diese ist, wie schon aus dem Bau der Gleichung zu erkennen ist, eine Parabel. Ihre Ordinaten bestimmen sich für:

$$x=0 \quad \text{zu} \quad \operatorname{tg}\alpha_0=Q_0=\frac{l}{6}(2p_1+p_2)$$

$$x=\frac{1}{4}l \quad \text{,,} \quad \operatorname{tg}\alpha_1=Q_1=\frac{l}{6}\frac{11p_1+13p_2}{16}$$

$$x=\frac{1}{2}l \quad \text{,,} \quad \operatorname{tg}\alpha_2=Q_2=\frac{l}{6}\frac{-p_1+p_2}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} l \quad ,, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = Q_3 = \frac{l}{6} \frac{(-13 p_1 - 11 p_2)}{16}$$

$$x = l \quad ,, \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = Q_4 = \frac{l}{6} (-p_1 - 2 p_2)$$

Um nun die Momentenlinie und die Querkraftlinie genau zeichnen zu können, trägt man die so berechneten Werte für $\mathfrak{M}$ nach Abb. 143b an die Schlußlinie $D'A'$ in den Viertelloten an. Sodann wählt man in Abb. 143c auf der Grundlinie $D''A''$ den Pol O im Abstand $H = 1$ t unter Berücksichtigung der gewählten Maßstäbe für die Momente und Querkräfte und schneidet mit der Parallelen zu $D'A'$ von O aus den Punkt d an. Von diesem Punkt d ausgehend, werden die oben berechneten Querkräfte Q_0, $Q_1 \ldots Q_5$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens aufgetragen, zum Beispiel $dd_0 = Q_0$ und $dd_4 = Q_4$. Die Verbindungslinien des Pols O mit den Endpunkten der Querkraftstrecken ergeben nunmehr die Neigungen der Tangenten an die Momentenlinien, so daß durch die Parallelen in Abb. 143b zu diesen Strahlen eine genaue Aufzeichnung der Momentenlinie möglich ist. Die Querkraftlinie im Pfosten findet man dadurch, daß man von den Endpunkten der einzelnen Querkraftstrecken, z. B. von d_3 parallel zur Grundlinie bis zum Punkt d_3' des zugehörigen Lotes, herüberschneidet und diese Schnittpunkte durch eine Parabel $d_0 a_4$ verbindet.

Endlich sei noch der in Abb. 144 dargestellte besondere Belastungsfall eines vierseitigen Rahmens betrachtet.

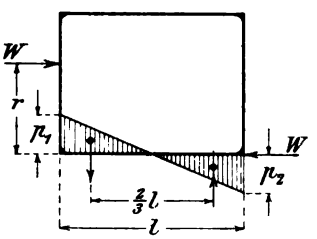


Abb. 144.

Durch eine beliebige wagerechte Last W, die auf einen der beiden Pfosten wirke, wird auf den Boden ein lotrechter Druck ausgeübt, dessen Verteilung der Einfachheit halber geradlinig nach Abb. 144 angenommen wird, während die wagerechte Stützkraft durch Reibung in der Bodenfuge übertragen werde. Nimmt man weiter an, daß die Kantenpressungen $p_2 = -p_1$, so ergibt sich

$$p_2 = -p_1 = -\frac{6 \mathfrak{M}_K}{l^2} = +\frac{6 W \cdot r}{l^2},$$

wobei $\mathfrak{M}_K = -W \cdot r$ ist. Während das Biegungsmoment des einfachen Balkens DC in der Mitte und an beiden Enden Null ist, erhält man aus dem Vorstehenden die Biegungsmomente in den beiden Viertelpunkten (vergl. Abb. 143b)

$$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_3 = \frac{3}{32} \mathfrak{M}_K$$

und die Querkräfte an den Balkenenden

$$Q_0 = Q_4 = -\frac{\mathfrak{M}_K}{l}.$$

2. Mittelkraftlinien.

Während bisher nur die Mittelkraftlinien für rechteckige Rahmen, ferner nur der Fall einer senkrechten Belastung des Rahmens (S. 64) sowie der Fall einer wagerechten Belastung des Rahmens (S. 70 u. 75) erörtert worden ist, möge hier noch die Mittelkraftlinie für Rahmen mit geknickter oder gekrümmter Balkenachse sowie für schräg gerichtete Kräfte, die auf einen Gelenkrahmen mit unregelmäßiger Form wirken, erörtert werden.

Um die Mittelkraftlinie für einen Rahmen mit geknickter oder gekrümmter Balkenachse zu zeichnen, verfährt man in genau derselben Weise, wie auf S. 64 nach Abb. 87 erläutert wurde. Man legt nach Abb. 145a u. b durch den Punkt m_2 einen Schnitt senkrecht zur Stabachse, der die Mittelkraftlinie im Punkte m_2' trifft, zerlegt sodann die Mittelkraft in diesem Punkte in eine Seitenkraft N_2 parallel und in eine Seitenkraft Q_2 rechtwinklig zur Stabachse und bringt im Punkte m_2 zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte von der Größe N_2 an. Im Balkenquerschnitt $m_2 m_2'$ wirkt sodann:

1. das Biegungsmoment $M_2 = N_2 \cdot y_2$
2. die Querkraft Q_2 und
3. die Längskraft N_2.

Der Vergleich von Abb. 144a u. b läßt erkennen, daß bei gleichbleibender Mittelkraft die Längskraft um so größer und die Querkraft um so kleiner wird, je mehr sich die Neigung der Stabachse der Neigung der Mittelkraft nähert.

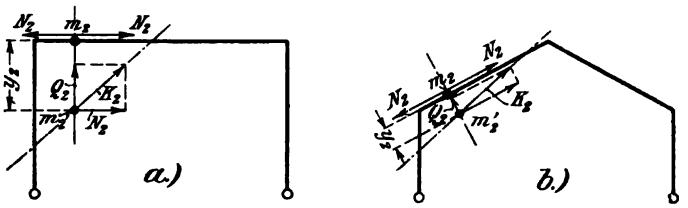


Abb. 145.

Die Mittelkraft für beliebig gerichtete Kräfte findet man ohne weiteres aus dem Kräfteplan, wenn der Rahmenschub X (Abb. 146) gegeben ist. Zur Probe müssen sich die Stützendrücke A und B auf der Mittelkraft R von P' und P'' schneiden. Die Längskräfte und die Querkräfte sind jeweils dadurch zu finden, daß man die Mittelkraft eines Schnittes in die zwei Seitenkräfte parallel und rechtwinklig zur Stabachse zerlegt. Für den Stabteil 3. z. B. ergibt sich die Mittelkraft bd durch Zusammensetzung der beiden Kräfte P' und A links vom Schnitt. Durch Zerlegung von bd findet man die Längskraft N_3 und die Querkraft Q_3. Die Betrachtung der Abb. 146 zeigt, daß für jeden Stab, z. B. für Stab 2—3—4, die Querkräfte im Kräfteplan als Streckengrößen auf einer rechtwinklig zur Stabrichtung gelegten Geraden von d aus abzugreifen sind und daß die zugehörigen Längskräfte sich als Lote ergeben, die von den Endpunkten der einzelnen Lasten auf diese Strecke gefällt werden.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß beim fertigen Rahmen für jeden Stab zwei Mittelkraftlinien in Betracht kommen, die sich durch die Verbindungslinien seines Wendepunktes mit den Wendepunkten der beiden Nachbarstäbe ergeben. Für den Stab DC der Abb. 91a (S. 75) kann sowohl $W_3 W_4$ als auch $W_1 W_4$ als Mittelkraft angesehen werden. Wie aus dem Beispiel IV hervorgeht, hat man daher die Möglichkeit, die jeweils günstigere von beiden Mittelkraftlinien zur Bestimmung der Quer- und Längskräfte zu wählen.

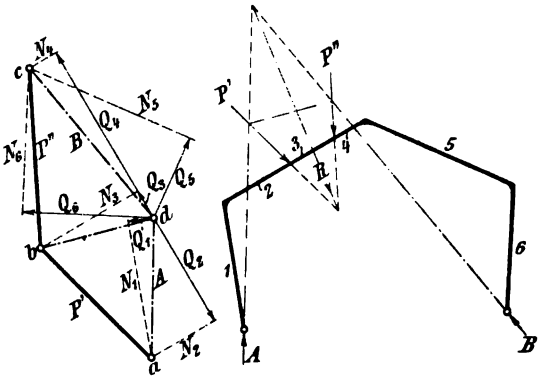


Abb. 146.

8. Biegelinie.

Die Gleichung für die Abschnitte der Tangenten an die Biegelinie in den Stabendpunkten hat nach S. 88 die allgemeine Form:

$$a = (M_A + 2\,M_B + n\,\mathfrak{M}) \cdot \frac{K}{6}$$

und

$$b = (2\,M_A + M_B + n'\,\mathfrak{M}) \cdot \frac{K}{6},$$

diejenige für den Pfeil in der Mitte des Stabes die Form:

$$c = (M_A + M_B + m\,\mathfrak{M}) \frac{K}{16}.$$

Die dort angegebenen Werte für $\frac{a}{K}$ und $\frac{b}{K}$, sowie für $\frac{c}{K}$ unterscheiden sich demnach für die verschiedenen Belastungsfälle nur durch die Vorzeichen und die verschiedenen Werte von n und m. Dabei sind die Werte sowohl für die Eckmomente M_A und M_B als auch für das einfache Biegungsmoment in Stabmitte $\mathfrak{M}$ jeweils mit dem Vorzeichen behaftet einzusetzen, wie sie sich aus der Rechnung ergeben (Abb. 147a).

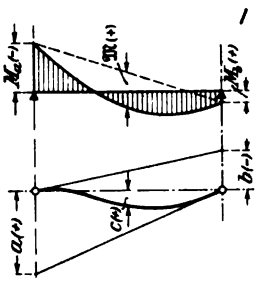


Abb. 147a u. b.

Die Werte n und m sind für die auf S. 88 gegebenen Belastungsfälle

1. mit gleichförmig verteilter Belastung $\left(\mathfrak{M} = \frac{p l^2}{8}\right)$:

$$n = n' = 2, \qquad m = \frac{5}{4};$$

2. mit einer Einzellast in Stabmitte $\left(\mathfrak{M} = \frac{Pl}{4}\right)$:

$$n = n' = 1{,}5, \qquad m = \frac{4}{3}.$$

Falls die Einzellast jedoch nicht in der Stabmitte, sondern im Abstand $x = \xi \cdot l$ vom Endpunkt A steht, also

$$\mathfrak{M} = \frac{P \cdot a\,(l-a)}{l} = Pl \cdot \xi\,(1-\xi)$$

ist, wobei stets $x < 0{,}5\,l$ sein muß, so ist zu setzen

$$n = 1 + \xi, \qquad n' = 2 - \xi, \qquad m = \frac{3 - 4\,\xi^2}{3\,(1-\xi)},$$

und zwar wird für

$\xi =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$1 - \xi =$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$m =$	1	1,096	1,183	1,257	1,300	1,333

Bei der Auftragung der auf diese Weise ermittelten Streckengrößen a, b und c ist zu beachten, daß nach Abb. 147b positive Werte nach der Innenseite des Rahmens zu, negative Werte nach außen zu, also genau nach derselben Vorzeichenregel wie für die Biegungsmomente aufzutragen sind (vergl. S. 58).

Dabei beginnt man vorteilhaft mit einem Stabe, der entweder in der Lage seiner Achse oder mit der Neigung eines Stabendes festliegt. Man geht also bei einem dreiseitigen Gelenkrahmen vom Balken, bei einem festen Rahmen von einem Fußpunkt, bei einem vierseitigen Rahmen von der Bodenplatte aus und setzt dann an die verschobenen Stabenden die Endtangenten des anschließenden nächsten Stabes an.

Beispielsweise ergibt sich die Darstellung der Biegelinie für den auf S. 111 (vergl. Abb. 131) behandelten Belastungsfall eines eingespannten Rahmens wie folgt:

Stab BC:

$$M_b = -2{,}766 \text{ tm}; \quad M_c = +3{,}751 \text{ tm}; \quad K_s = K \cdot \nu \frac{h}{e} = \frac{8}{9} K$$

$$b' = (M_b + 2\,M_c)\frac{K_s}{6} = (-2{,}766 + 7{,}502)\frac{8}{9} \cdot \frac{K}{6} = +0{,}702\,K$$

$$c' = (2\,M_b + M_c)\frac{K_s}{6} = (-5{,}532 + 3{,}751)\frac{8}{9} \cdot \frac{K}{6} = -0{,}264\,K.$$

Stab AB:

$$M_a = +1{,}590 \text{ tm}; \quad M_b = -2{,}766 \text{ tm}$$

$$a = (M_a + 2\,M_b)\frac{K}{6} = (+1{,}590 - 5{,}532)\frac{K}{6} = -0{,}656\,K$$

$$b = (2\,M_a + M_b)\frac{K}{6} = (+3{,}180 - 2{,}766)\frac{K}{6} = +0{,}069\,K.$$

Stab DA:

$$M_d = -5{,}893\,\text{tm};\quad M_a = +1{,}590\,\text{tm};\quad \mathfrak{M} = +4{,}20\,\text{tm};\quad K_s = \frac{8}{1}K$$

$$d' = (M_d + 2M_a + 1{,}7\,\mathfrak{M})\frac{K_s}{6} = (-5{,}893 + 3{,}180 + 7{,}14)\frac{8}{9}\cdot\frac{K}{6}$$
$$= +0{,}656\,K$$

$$a' = (2M_d + M_a + 1{,}3\,\mathfrak{M})\frac{K_s}{6} = (-11{,}796 + 1{,}590 + 5{,}46)\frac{8}{9}\cdot\frac{K}{6}$$
$$= -0{,}702\,K.$$

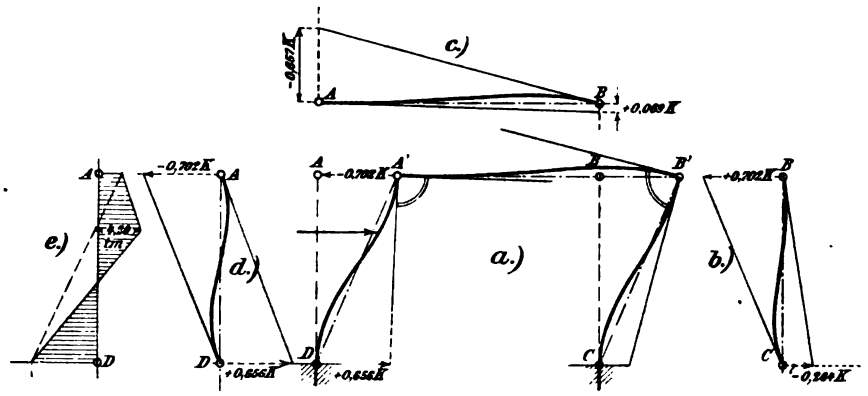


Abb. 148.

Die so gefundenen Werte für a und b sind nunmehr nach Abb. 148 unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens in ein Rahmennetz einzutragen. Zur besseren Veranschaulichung ist dort jeder Stab mit den zugehörigen Tangentenabschnitten und in Abb. 148e die Momentenfläche des linken Pfostens besonders herausgezeichnet worden. Dabei ist zu bemerken, daß im allgemeinen jeder Tangentenabschnitt dem Vorzeichen nach mit dem Biegungsmoment am gegenüberliegenden Ende des Stabes übereinstimmen wird. Bei der Einzeichnung in das Netzbild ist ferner zu beachten, daß z. B. beim rechten Pfosten BC die positive Strecke $b' = +0{,}702\,K$ vom Endpunkt B' der verschobenen Stabsehne aus nach innen, von dem Endpunkt B der ursprünglichen Stabsehne aus also nach außen anzusetzen ist. Umgekehrt ist beim linken Pfosten DA die negative Strecke $a' = -0{,}702\,K$ an der verschobenen Stabsehne nach außen, von dem ursprünglichen Endpunkt A des Pfostens aus daher nach innen zu aufzutragen. Da diese beiden Streckengrößen b' und a' gleichzeitig die Verschiebung des Balkens darstellen, müssen sie einander gleich sein, was hier auch der Fall ist.

Ebenso müssen auch die an einem Eckpunkt anstoßenden Stabdrehwinkel einander gleich sein, z. B. $\frac{d'}{h} = \frac{b}{l}$ und $\frac{a}{l} = \frac{c'}{h}$, da der Rahmenwinkel an diesen Ecken unverändert bleiben muß.

Beim Aufzeichnen der Biegelinie liegt zunächst der Gedanke nahe, das ursprüngliche Stabnetz zugrunde zu legen und über den einzelnen Stäben deren Verbiegungen aufzutragen. Dieses Verfahren ergibt, wie Abb. 149a zeigt, nur ein loses Nebeneinanderreihen der Biegelinien für die einzelnen Rahmenstäbe. Bei dem Bestreben, ein zusammenhängendes Bild der Formänderung des Rahmens zu erhalten, werden aber häufig an die Endtangenten der Biegelinien des Balkens AB nach Abb. 149b in den Ecken A und B rechte Winkel angetragen, so daß die Verbiegung der beiden Pfosten falsch eingezeichnet wird.

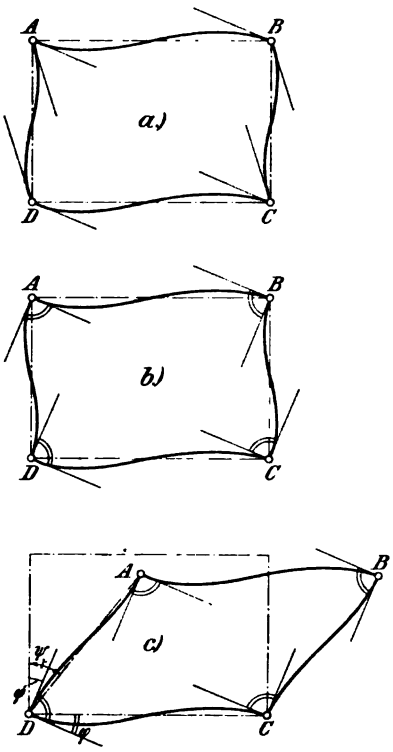


Abb. 149.

Auf Grund unserer Erfahrungen muß daher dringend davor gewarnt werden, in das unverschobene Stabnetz die Biegelinie überhaupt einzuzeichnen, weil man sonst sehr leicht zu dem hier angedeuteten Fehler verleitet wird. Das richtige Bild (Abb. 149c) der Formänderung des Rahmens kann man nur dann darstellen, wenn man den Stabdrehwinkel ψ z. B. hier für die Verdrehung des Pfostens einführt und diesen jedenfalls größer als den Knotendrehwinkel φ (vergl. Abb. 106, S. 85) annimmt. Es empfiehlt sich also, für das Aufskizzieren der Biegelinie den Winkel φ eher zu groß anzunehmen, um sich vor einem solchen Fehler im Vorzeichen der Stabkrümmung zu bewahren (vergl. auch S. 86 sowie S. 77 u. f.).

4. Die Wahl des mittleren Trägheitsmomentes

für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt bietet bei der Berechnung der Einspannungsgrade oft gewisse Schwierigkeiten und ist für das Ergebnis immerhin von wesentlichem Einfluß, wie z. B. auch aus den Erörterungen Beispiel IV hervorgeht. Einen Anhalt für die Wahl des mittleren Trägheitsmomentes bei den im Querschnitt meist stark anwachsenden Pfosten der Gelenkrahmen möge folgendes Rechnungsergebnis bieten. Belastet man den Kragträger der Abb. 150, der einen rechteckigen Querschnitt mit einer von d' bis d geradlinig wachsenden Höhe besitzt, mit einer Einzellast X in D, so erhält man daselbst unter Berücksichtigung der wirklich vorhandenen Querschnitte eine Durchbiegung

$$\delta = \frac{Xh^3}{EJ} \cdot \frac{\ln a}{a-1},$$

wenn $J = \frac{bd^3}{12}$, ferner $a = \eta(3 + 3\eta + \eta^2)$ und $\eta = \frac{d'}{d}$ gesetzt wird.

Den gleichen Wert der Durchbiegung erhält man nach der Gleichung

$$\delta = \frac{X h^3}{3 E J_m} \quad \text{mit} \quad J_m = \frac{b d_m^3}{12},$$

wenn man also einen Balken von gleichbleibender Querschnittshöhe d_m zugrunde legt und für d_m den Wert in etwa $^2/_3$ der Pfostenhöhe DA wählt. Aus der Berechnung ergibt sich, daß für $\frac{d'}{d} = 0{,}8$ und $\frac{d'}{d} = 0{,}2$ diese Stelle des zu wählenden maßgebenden Trägheitsmomentes zwischen 0,665 und 0,58 der Höhe schwankt.

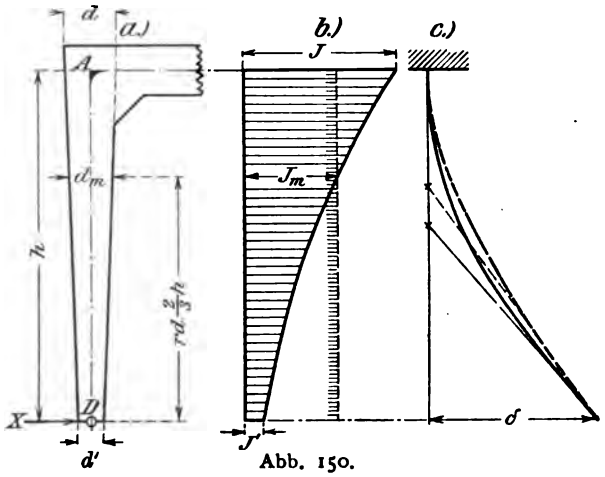


Abb. 150.

Dieses Ergebnis gilt zunächst nur für den Belastungsfall der Abb. 150, also für einen durch einen Rahmenschub X allein belasteten Pfosten. Für andere Stabformen und andere Belastungsarten ist, falls auf die Ermittlung dieses Einflusses Gewicht gelegt wird, am einfachsten die Biegelinie genau zu ermitteln und daraus zur Einführung in die Berechnung des Einspannungsgrades dasjenige maßgebende Trägheitsmoment J_m zu bestimmen, bei welchem die gleiche Durchbiegung hervorgerufen wird. Hierzu wird noch bemerkt, daß die in Abb 150c ausgezogene genaue Biegelinie des Stabes mit der gestrichelten Linie des prismatischen Stabes nicht übereinstimmt, insbesondere also auch nicht der Tangentenwinkel am freien Ende, wie auch aus Beispiel IV (Abb. 189 u. 190) hervorgeht.

In Anbetracht der Unsicherheit in der Annahme der mitwirkenden Plattenbreite sowie der Vernachlässigung der Eiseneinlage und der Schwierigkeit, den Wert der Elastizitätsziffer genau zu bestimmen, muß jedoch im allgemeinen von einer solchen genauen Ermittlung des maßgebenden Trägheitsmomentes abgeraten werden, da der Zeitaufwand in keinem Verhältnis zum tatsächlichen Erfolge steht.

I. Beispiel. Dreiseitige Rahmenbrücke für eine Eisenbahnunterführung.

Die in Abb. 151 u. 152 dargestellte Brücke ist ein Beispiel einer bei den Königlich Sächsischen Staatseisenbahnen mehrfach angewendeten Grundform für eine Straßenüberführung in Eisenbeton (vergl. Handbuch für Eisenbetonbau, II. Aufl., Band VI, S. 237 und S. 307 u. f.). Wie aus Abb. 152 hervorgeht, steht dieser Rahmen unmittelbar auf dem Erdreich, so daß besondere Gründungskörper erspart werden konnten. Hierdurch entsteht aber, wie auf S. 13 erörtert worden ist, eine Unklarheit in der statischen Stützung, weil bei der hier vorhandenen Ausbildung der Pfosten-

füße weder eine freie Drehbarkeit wie beim Zweigelenkrahmen, noch eine feste Einspannung der Pfostenenden gewährleistet ist. In folgendem ist daher die Rechnung für diese beiden Stützungsarten nacheinander durchgeführt worden, die die Grenzfälle der hier möglichen Stützungsweisen

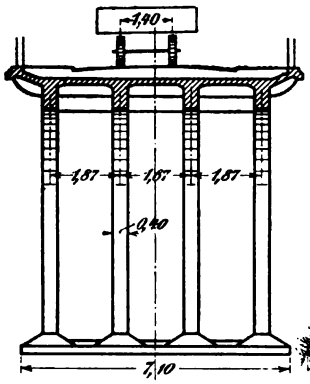


Abb. 151. Querschnitt der Rahmenbrücke.

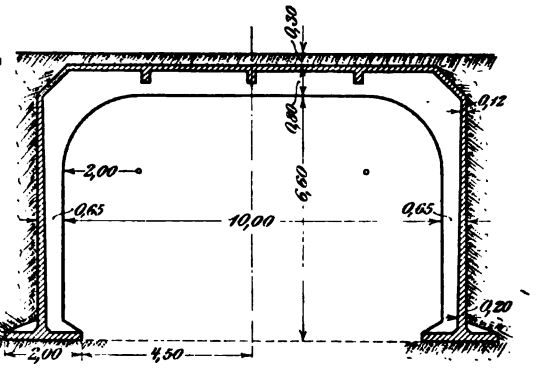


Abb. 152. Längsschnitt der Rahmenbrücke.

und der dabei auftretenden Beanspruchungen darstellen. Die wirklich entstehenden Beanspruchungen des Eisenbetonkörpers liegen also zwischen den beiden daraus zu berechnenden Werten.

1. Die Rahmenabmessungen und Bemessungsgrößen.

Der Balken hat den in Abb. 153a dargestellten Querschnitt, für den sich die Querschnittsfläche

$$f = 1{,}87 \cdot 0{,}14 + 0{,}40 \cdot 0{,}66 = 0{,}526 \text{ qm},$$

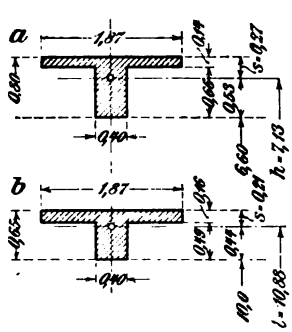


Abb. 153. Querschnitt des Balkens und Pfostens.

der Schwerpunktabstand

$$s = \frac{1{,}47 \cdot 0{,}14^2 + 0{,}40 \cdot 0{,}80^2}{2 \cdot 0{,}526} = 0{,}271 \text{ m},$$

das Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{3}(1{,}87 \cdot 0{,}271^3 - 1{,}47 \cdot 0{,}131^3 + 0{,}40 \cdot 0{,}529^3) = 0{,}0310 \text{ m}^4$$

berechnen. Der Pfostenquerschnitt (Abb. 153b) hat bei einer mittleren Plattenstärke von $\frac{0{,}20 + 0{,}12}{2} = 0{,}16$ m die entsprechenden Querschnittswerte:

$$f = 1{,}87 \cdot 0{,}16 + 0{,}40 \cdot 0{,}49 = 0{,}495 \text{ qm}$$

$$s = \frac{1{,}47 \cdot 0{,}16^2 + 0{,}40 \cdot 0{,}65^2}{2 \cdot 0{,}495} = 0{,}209 \text{ m}$$

$$J_s = \frac{1}{3}(1{,}87 \cdot 0{,}209^3 - 1{,}47 \cdot 0{,}049^3 + 0{,}40 \cdot 0{,}441^3) = 0{,}0171 \text{ m}^4.$$

Demnach ergeben sich als Rahmenabmessungen (Abb. 154):
die Stützweite

$$l = 10{,}0 + 2\,(0{,}65 - 0{,}21) = 10{,}88 \text{ m},$$

die Pfostenhöhe

$$h = 6{,}60 + (0{,}80 - 0{,}27) = 7{,}13 \text{ m}$$

und damit der Wert

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_s} = \frac{7{,}13}{10{,}88} \cdot \frac{0{,}0310}{0{,}0171} = 1{,}19$$

und für den Gelenkrahmen das Nennerglied

$$\alpha_1 = 3 + 2\nu = 5{,}38.$$

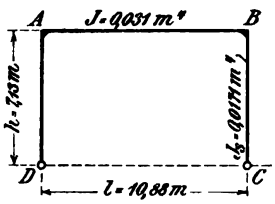


Abb. 154.

2. Die Belastungen des Rahmens.

a) Ständige Last. (Abb. 155.)

α) Raumgewichte:

Eisenbeton	2400	kg/cbm
Beschotterung	2000	„
Erdgewicht	1650	„

β) Lotrechte Belastung des Balkens, und zwar Eigengewicht des Balkens:

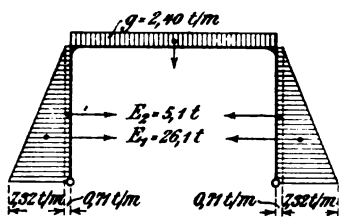


Abb. 155.

$$g_1 = \text{rd. } 0{,}526 \cdot 2{,}40 \;.\;.\;.\;. = 1{,}26 \text{ t/m},$$

Gewicht der Ueberschüttung und der Fahrbahnbefestigung:

$$g_2 = 0{,}30 \cdot 1{,}87 \cdot 2{,}0 \;.\;.\;. = 1{,}12 \;„$$

zusammen ständige Last $= 2{,}38 =$ rd. 2,40 t/m.

γ) Wagerechte Belastung der Pfosten: Erddruck infolge der Hinterfüllung des Pfostens[1]) für die Höhe $h' = 7{,}13$ m:

$$e_1 = (\gamma_1 \cdot b)\, h' \cdot \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varrho}{2}\right) = (1{,}65 \cdot 1{,}87)\, 7{,}13 \cdot \frac{1}{3} = 7{,}32 \text{ t/m},$$

infolge der Ueberschüttung mit $\gamma_2 = (0{,}27 + 0{,}30)\, 2{,}0 = 1{,}14$ t/m

$$e_2 = (\gamma_2 \cdot b) \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varrho}{2}\right) = (1{,}14 \cdot 1{,}87)\, \frac{1}{3} = 0{,}71 \text{ t/m},$$

zusammen daher an ständiger Belastung:

$$E_1 = 7{,}32 \cdot \frac{7{,}13}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;. = 26{,}1 \text{ t}$$

$$E_2 = 0{,}71 \cdot 7{,}13 \;.\;.\;.\;. \text{ rd.} = 5{,}1 \text{ t}$$

zusammen $E = 31{,}2$ t.

[1]) Nach „Hütte" II, 1905, S. 299 für einen Reibungswinkel $\varrho = 30°$ und ein Erdgewicht $\gamma = 1650$ kg/qm.

b) Verkehrslast (Abb. 156).

Ein 12 t schwerer Wagen mit 1,40 m Radstand, 3,50 m Achsstand und Menschengedränge von 400 kg/qm auf dem übrigen Raum.

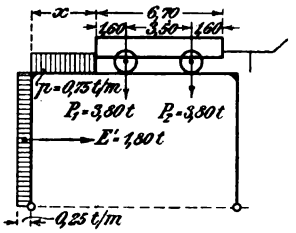


Abb. 156.

α) Balkenlast. Für den Fall, daß nach Abb. 151 eine Radreihe unmittelbar über dem Balken steht, sind demnach zwei Einzellasten von

$$P_1 = P_2 = \frac{12{,}0}{4}\left(1 + \frac{1{,}87 - 1{,}40}{1{,}87}\right) = 3{,}76 = \text{rd. } 3{,}80 \text{ t}$$

zu rechnen und für das anschließende Menschengedränge eine gleichmäßig verteilte Belastung

$$p = 1{,}87 \cdot 0{,}40 = 0{,}75 \text{ t/m}.$$

β) Pfostenbelastung. Von der Verkehrslast $p = 0{,}40$ t/qm auf dem Raum vor der Brücke wird:

$$e_3 = (p \cdot b)\,\mathrm{tg}^2\left(45° - \frac{\varrho}{2}\right) = (0{,}40 \cdot 1{,}87)\frac{1}{3} = 0{,}25 \text{ t/m}$$

oder

$$E' = 0{,}25 \cdot 7{,}13 = 1{,}78 \text{ t/m} = \text{rd. } 1{,}80 \text{ t/m}.$$

Während die ständigen Lasten stets gleichzeitig wirken, ist die Verkehrslast abwechselnd jeweils in ungünstigster Stellung anzunehmen.

A. Berechnung für den Gelenkrahmen.

a) Die Berechnung der Eckmomente für ständige Last.

α) Die gleichförmig verteilte Last auf dem Balken $g = 2{,}40$ t/m, erzeugt das Biegungsmoment in der Mitte des entsprechenden frei gestützten Balkens

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{g l^2}{8} = \frac{2{,}40 \cdot 10{,}88^2}{8} = 35{,}51 \text{ tm}.$$

Der Einspannungsgrad an den Ecken A und B berechnet sich nach Gleichung 3) der Zusammenstellung am Schlusse

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{2}{\alpha_1} = -\frac{2}{5{,}38} = -0{,}372$$

und damit die Eckmomente

$$M_A = M_B = \mu \cdot \mathfrak{M}_0 = -0{,}372 \cdot 35{,}51 = -13{,}20 \text{ tm}.$$

β) Die dreieckförmig verteilte Last E_1 auf dem linken Pfosten ergibt das Kragmoment

$$\mathfrak{M}_K = -E_1 \cdot \frac{h}{3} = -26{,}1 \cdot \frac{7{,}13}{3} = -62{,}0 \text{ tm}.$$

Nach Gleichung 7) der Zusammenstellung sind die Einspannungsgrade

$$\mu_A = -\frac{30 + 13\nu}{20\,\alpha_1} = -\frac{30 + 13 \cdot 1{,}19}{20 \cdot 5{,}38} = -0{,}423$$

$$\mu_B = +\frac{30 + 27\nu}{20\,\alpha_1} = +\frac{30 + 27 \cdot 1{,}19}{20 \cdot 5{,}38} = +0{,}577.$$

Demnach

$$M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_K = -0{,}423\,(-62{,}0) = +26{,}2 \text{ tm}$$
$$M_B = \mu_B \cdot \mathfrak{M}_K = +0{,}577\,(-62{,}0) = -35{,}8 \text{ tm}$$

γ) Desgl. auf dem rechten Pfosten. Wegen der Symmetrie erhält man die gleichen Werte wie unter β), nur vertauscht, also

$$M_A = -35{,}8 \text{ tm}; \qquad M_B = +26{,}2 \text{ tm}.$$

δ) Die gleichförmig verteilte Last E_2 auf dem linken Pfosten ergibt

$$\mathfrak{M}_K = -E_2 \cdot \frac{h}{2} = -5{,}1 \cdot \frac{7{,}13}{2} = -18{,}2 \text{ tm}.$$

Nach Gleichung 6) wird

$$\mu_A = -\frac{6+3\nu}{4\alpha_1} = -\frac{6+3\cdot 1{,}19}{4\cdot 5{,}38} = -0{,}445$$
$$\mu_B = +\frac{6+5\nu}{4\alpha_1} = +\frac{6+5\cdot 1{,}19}{4\cdot 5{,}38} = +0{,}555$$

und damit $M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_K = -0{,}445\,(-18{,}2) = +8{,}1$ tm
$M_B = \mu_B \cdot \mathfrak{M}_K = +0{,}555\,(-18{,}2) = -10{,}1$ tm

ε) Desgl. auf dem rechten Pfosten. Wegen der Symmetrie wird wie vorher

$$M_A = -10{,}1 \text{ tm}$$
$$M_B = +8{,}1 \text{ tm}$$

ϑ) Von der gesamten ständigen Last wird somit

$M_A = -13{,}2 + 26{,}2 - 35{,}8 + 8{,}1 - 10{,}1 = -24{,}8$ tm
$M_B = -13{,}2 - 35{,}8 + 26{,}2 - 10{,}1 + 8{,}1 = -24{,}8$ tm

also der Symmetrie wegen naturgemäß $M_A = M_B$.

b) Die Berechnung der Eckmomente für Verkehrsbelastung.

α) Für die auf dem Balken wirkenden Einzellasten ist nach Gleichung 1) der Zusammenstellung:

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{3}{2\alpha_1} = -\frac{3}{2\cdot 5{,}38} = -0{,}279.$$

Das Eckmoment für die beiden Einzellasten der Abb. 156 ist

$$M_A = M_B = \mu \cdot \Sigma \frac{P \cdot a \cdot b}{l} =$$

$$= \frac{\mu \cdot P}{l}\,[(x+1{,}6)\,(l-x-1{,}6) + (x+5{,}1)\,(l-x-5{,}1)] =$$

$$= \frac{\mu}{l} \cdot 3{,}80\,(-2x^2 + 8{,}36x + 44{,}326).$$

Für die anschließende gleichförmig verteilte Last, die aus Einzellasten $P = p \cdot dx$ zusammengesetzt gedacht wird, ist

$$M_A = M_B = \frac{\mu}{l}\int_0^x p\,dx \cdot x\,(l-x) = \frac{\mu}{l} \cdot \frac{px^2}{6}\,(3l - 2x)$$

$$= \frac{\mu}{l} \cdot \frac{0{,}75}{6} \cdot x^2\,(32{,}64 - 2x).$$

Zusammen wird daher

$$M_A = M_B = \frac{\mu}{l}\left(-0{,}25\,x^3 - 3{,}52\,x^2 + 31{,}77\,x + 168{,}44\right)$$

und mit $\mu = -0{,}279$

$$M_A = M_B = -\frac{1}{10{,}88}\,(0{,}070\,x^3 + 0{,}98\,x^2 - 8{,}86\,x - 47{,}00).$$

Dieser Wert wird am größten für $x = 3{,}34$ m, und zwar

$$M_A = M_B = -0{,}279 \cdot \frac{225{,}97}{10{,}88} = -5{,}80 \text{ tm}.$$

β) Zur Bestimmung des größten positiven Biegungsmomentes erhält man das positive Biegungsmoment unter der mittelsten Last für den einfachen Balken:

$$\mathfrak{M} = \frac{\Sigma P x}{l}(l - x - 1{,}60) - P_2 \cdot 3{,}50 =$$

$$= \left[\frac{0{,}75 \cdot x^2}{2} + 2 \cdot 3{,}80\left(x + \frac{6{,}70}{2}\right)\right]\frac{l - x - 1{,}60}{l} - 3{,}80 \cdot 3{,}50 =$$

$$= \frac{1}{10{,}88}\,[-0{,}375\,x^3 - 4{,}12\,x^2 + 45{,}07\,x + 91{,}57],$$

für den Rahmenbalken daher

$$+ M_{\max} = \mathfrak{M} + M_A = \frac{1}{10{,}88}\,[-0{,}305\,x^3 - 3{,}14\,x^2 + 36{,}21\,x + 44{,}57].$$

Der Größtwert dieses Biegungsmomentes ergibt sich aus der Bedingung:

$$\frac{dM}{dx} = 0 \quad \text{für } x = 3{,}72 \text{ m} \quad \text{zu } M_{\max} = +11{,}04 \text{ tm},$$

wobei

$$M_A = M_B = -5{,}77 \text{ tm}.$$

γ) Von der Verkehrslast $E' = 1{,}80$ t auf dem linken Pfosten wird

$$\mathfrak{M}_K = -1{,}80 \cdot \frac{7{,}13}{2} = -6{,}42 \text{ tm},$$

$$\mu_A = -0{,}445; \quad \mu_B = +0{,}555 \text{ (wie im Falle a) } \delta),$$

also

$$M_A = +2{,}86 \text{ tm}; \quad M_B = -3{,}56 \text{ tm}.$$

c) Die Auftragung der Biegungsmomente und Querkräfte erfolgt von der gestreckten Rahmenachse aus.

In Abb. 157a sind zunächst die oben berechneten Eckmomente von der ständigen Last $M_A = M_B = -24{,}8$ tm als Strecken AA' und BB' aufgetragen. Die Verbindungslinien DA', $A'B'$ und $B'C$ bilden für die drei Rahmenstäbe die Schlußlinien, an welche die Momentenflächen der frei gestützten Stäbe angesetzt werden. Für den Balken AB ist diese Momentenfläche eine Parabel mit der Höhe $\mathfrak{M}_0 = 35{,}51$ tm (vergl. Punkt 2 a α).

Die Momentenlinie der trapezförmig verteilten Belastung des Pfostens DA ist dagegen eine parabelähnliche Linie, die ebenso wie die Quer-

kraftslinie nach der Anleitung auf S. 126 gezeichnet werden kann. Die zur Auftragung dieser Linien erforderlichen Streckengrößen berechnen sich aus den dort angegebenen Gleichungen mit den aus Abb. 155 zu entnehmenden Werten

$$l = 7{,}13 \text{ m}, \quad p_1 = 8{,}03 \text{ t/m}, \quad p_2 = 0{,}71 \text{ t/m}.$$

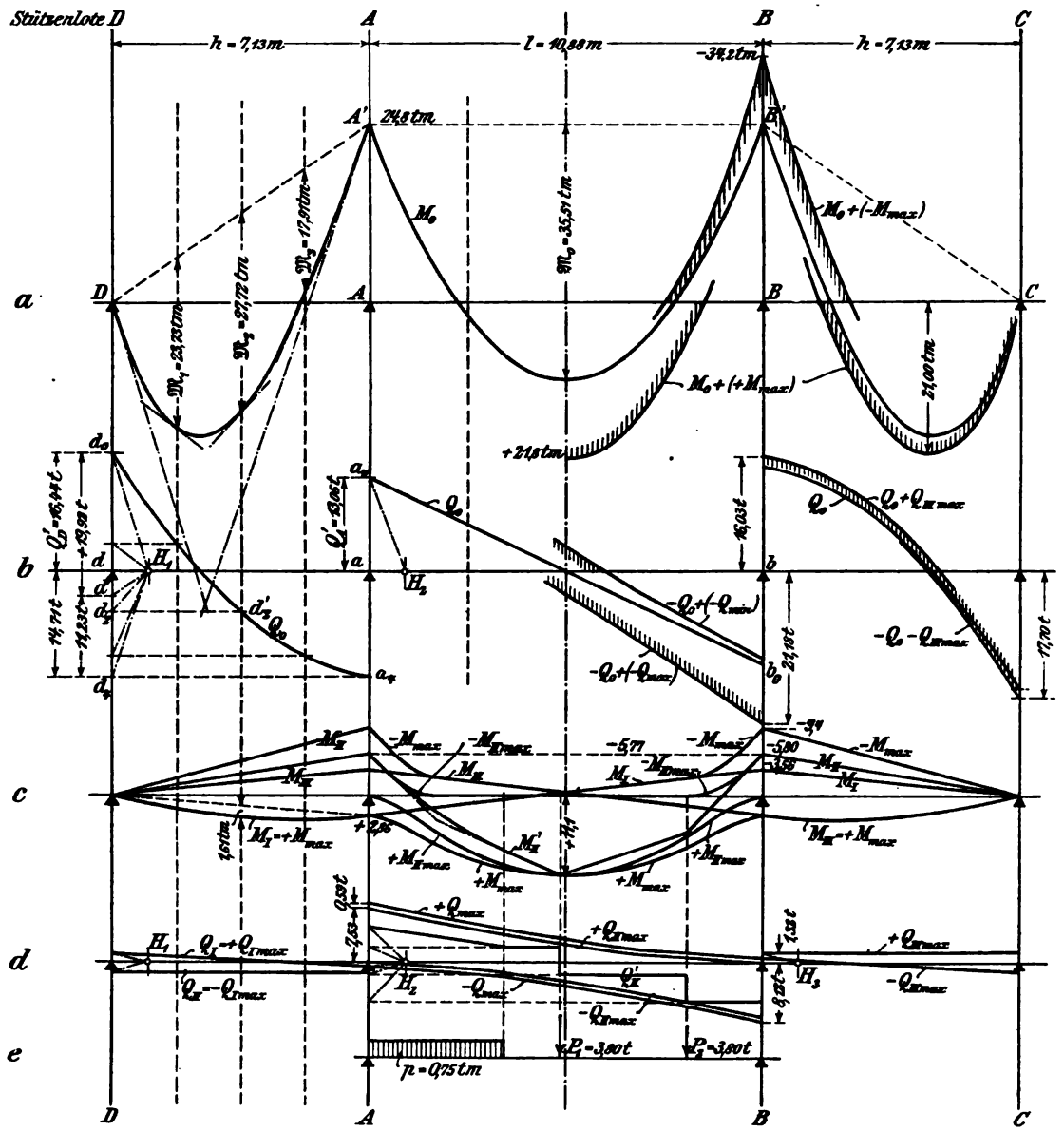


Abb. 157. Biegungsmomente und Querkräfte für die als dreiseitiger Gelenkrahmen betrachtete Rahmenbrücke.

Man erhält damit die von der Schlußlinie DA' in Abb. 157a anzutragenden Biegungsmomente $\mathfrak{M}_1 = 23{,}73$ tm, $\mathfrak{M}_2 = 27{,}72$ tm und $\mathfrak{M}_3 = 17{,}91$ tm, sowie die Querkräfte $Q_0 = 19{,}92$ t, $Q_1 = 7{,}25$ t, $Q_2 = -2{,}18$ t, $Q_3 = -8{,}34$ t und $Q_4 = -11{,}23$ t, die von dem Punkt d' des Kräfteplanes in Abb. 157b ausgehend am Stützenlot D anzusetzen sind.

Die Kraftstrecken dd_0 und $dd_4 = aa_4$ stellen die am Rahmen wagerecht wirkenden Stützendrücke des Pfostens in den Ecken D und A dar, die zusammen den Erddruck $E_1 + E_2 = 5{,}1 + 26{,}1 = 31{,}2$ t ergeben müssen, sodaß also

$$Q_0 + Q_5 = 19{,}92 + 11{,}23 = 16{,}44 + 14{,}71 = 31{,}15 = \text{rd. } 31{,}2 \text{ t}$$

ist.

Die Querkraftlinie $a_0 b_0$ für die gleichförmig verteilte Belastung des Balkens AB ist eine Gerade, die die Balkenachse in der Mitte schneidet. Sie ist bestimmt durch die Querkraft an der Ecke A

$$Q_{A'} = A = \frac{g\,l}{2} = \frac{2{,}40 \cdot 10{,}88}{2} = 13{,}06 \text{ t}.$$

Für den rechten Pfosten BC sind wegen der Symmetrie die Querkräfte in den einzelnen Schnitten der Größe nach gleich den in den symmetrisch gelegenen Schnitten des linken Pfostens. Sie haben jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen, weil die Neigung der Tangentenwinkel der Momentenlinie jeweils den entgegengesetzten Sinn wie im linken Pfosten hat.

Die Momente und Querkräfte infolge der Verkehrslast ergeben sich in ähnlicher Weise und sind in Abb. 157c und 157d aufgetragen.

Das größte positive Biegungsmoment im Balken AB von dem Lastenzug der Abb. 156 ergab sich oben unter b) für $x = 3{,}72$ m zu $M_{max} = +11{,}04$ tm, wobei $M_A = M_B = -5{,}77$ tm war. Für diese Stellung ist wiederum mit Hilfe der Schlußlinie und der Momentenfläche des frei gestützten Balkens die Momentenlinie M_{II}' für den Stab AB aufgetragen worden. Wird dieses Verfahren für verschiedene Stellungen des Lastenzuges in gleicher Weise durchgeführt, so erhält man die Umhüllende $+M_{II\,max}$ und $-M_{II\,max}$ der Größtwerte aller positiven und negativen Biegungsmomente im Balken AB, die in Abb. 157c dargestellt sind.[1])

In den beiden Pfosten sind die Größtwerte der negativen Biegungsmomente infolge der Balkenbelastung durch eine Gerade M_{II} bestimmt, die auf den Loten in A und B die oben berechneten Größtwerte $M_A = M_B = -5{,}80$ tm abschneidet.

Wird der linke Pfosten durch den von der Verkehrslast hervorgerufenen Erddruck belastet, so ergibt sich das oben berechnete Eckmoment $M_A = +2{,}86$ tm und damit die gestrichelt eingetragene Schlußlinie im linken Pfosten, über welcher die der gleichförmig verteilten Be-

[1]) Die Umhüllende der größten Momente im Balken findet man auch in einfacher Weise durch Berechnung einiger Zwischenwerte nach der Gleichung für $+M_{max}$ (S. 138), die man als Ordinaten aufträgt und durch eine symmetrisch zur Mittelachse verlaufende parabelähnliche Linie verbindet.

lastung $E' = 1{,}80$ t (Abb. 156) entsprechende Momentenparabel mit der Pfeilhöhe $\mathfrak{M} = \frac{1{,}80 \cdot 7{,}13}{8} = 1{,}61$ tm anzusetzen ist. Der weitere Verlauf dieser Linie M_I im Balken AB und dem Pfosten BC ist durch das Eckmoment $M_B = -3{,}56$ tm bestimmt. Die gleiche Belastung des rechten Pfostens ergibt die zu M_I vollkommen symmetrische Linie M_{III}.

Die Größtwerte $+M_{max}$ der positiven Biegungsmomente im Balken bei beliebiger Belastung des Rahmens ergeben sich dadurch, daß man den Ordinaten der Flächen $M_{II\,max}$ die der Dreieckflächen M_I und M_{III} hinzufügt. Die negativen Größtwerte $-M_{max}$ ergeben sich in gleicher Weise aus $-M_{II\,max}$ und M_I bezw. M_{III}. In den Pfosten sind die Linien M_I und M_{III} bereits die positiven Größtwerte, während man die negativen Größtwerte durch Summierung der negativen Dreieckflächen von M_{II} und M_I bezw. M_{III} erhält.

Die von der Verkehrslast herrührenden Querkräfte (Abb. 157 d) ergeben sich in ähnlicher Weise wie bei der ständigen Last (Abb. 157 a und b) aus den Momentenlinien der Abb. 157 c).

Zunächst möge die Querkraftlinie des Balkens AB für die Laststellung der Abb. 157 e erläutert werden, die den Größtwert des positiven Biegungsmomentes liefert und der Momentenlinie M_{II}' in Abb. 157 c entspricht. Zieht man, von dem Pol H_2 mit dem Polabstand von 1 m ausgehend, die Parallelen zu den einzelnen Strecken der Momentenlinie, so schneiden diese auf dem Stützenlot in A die Querkräfte für die betreffenden Balkenschnitte ab. Durch wagerechtes Hinüberschneiden dieser Strecken auf die Lote in den Lastpunkten von P_1 und P_2 ergibt sich die Querkraftlinie für den rechten, nur von Einzellasten beanspruchten Balkenteil, während unter der gleichförmig verteilten Last im linken Trägerteil eine geneigte Gerade zu ziehen ist. Diese Querkraftlinie gilt nur für die Laststellung der Abb. 157 e. Es ist demnach noch die Umhüllende der größten Querkräfte zu zeichnen. Dies geschieht mit Hilfe des sogenannten A-Polygons, das unmittelbar auf die Grundlinie anzusetzen ist, weil beim Balken des Gelenkrahmens, ebenso wie bei einem einfachen Balken auf zwei Stützen, die Schlußlinie der Momentenfläche stets wagerecht liegt.

Zu diesen Querkräften infolge der auf den Balken wirkenden Lasten tritt noch diejenige Querkraft, die im Balken durch die Belastung eines Pfostens nach Abb. 156 entstehen kann. Man erhält sie als Abschnitt auf dem Stützenlot in A, wenn man von H_2 eine Parallele zu der Momentenlinie M_I der Abb. 157 c zieht. Da die Momentenlinie M_I eine Gerade ist, bleibt der Wert der Querkraft auf die ganze Länge des Balkens gleich groß und ist den vorher gefundenen Größtwerten $-Q_{II\,max}$ zuzuschlagen, in der gleichen Größe auch den Werten $+Q_{II\,max}$ für den Fall, daß der rechte Pfosten in der gleichen Weise belastet ist.

In den Pfosten DA und BC ergeben sich die Querkräfte wiederum aus einem Kräfteplan mit den Polen H_1 und H_3 (Polabstand = 1 m)

dadurch, daß zu den Momentenlinien der Abb. 157c die entsprechenden Parallelen gezogen werden.

Diese so gefundenen Größtwerte der Momente und der Querkräfte infolge der Verkehrslast sind denen aus dem Eigengewicht (Abb. 157a und b) zuzuschlagen. Man erhält dann als Endergebnis die auf der rechten Seite dieser Abbildung angegebenen anschraffierten Linien, die für die Spannungsermittlung maßgebend sind.

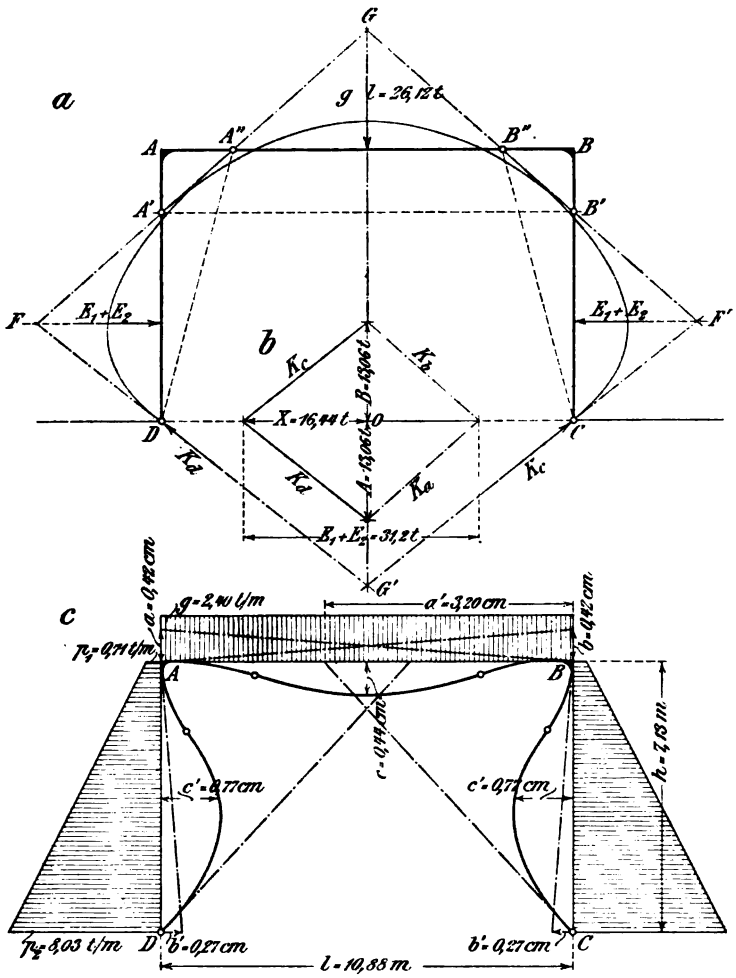


Abb. 158. Mittelkraftlinie und Biegelinie für die ständige Last der Rahmenbrücke.

d) Aufzeichnung der Mittelkraftlinie und Biegelinie.

Mit der Auftragung der größten Biegungsmomente und Querkräfte ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Die Auftragung der Mittelkraftlinie ist bei der einfachen Grundform des Gelenkrahmens für die statische Berechnung kaum von Bedeutung,

besonders deshalb, weil die zu untersuchenden Belastungsfälle hier sehr zahlreich und verschiedenartig sind. Da jedoch die Mittelkraftlinie und die Biegelinie zur Veranschaulichung der Kraftwirkung sehr geeignet sind, wurden beide für die ständige Belastung und für eine bestimmte Stellung der Verkehrslast aufgezeichnet.

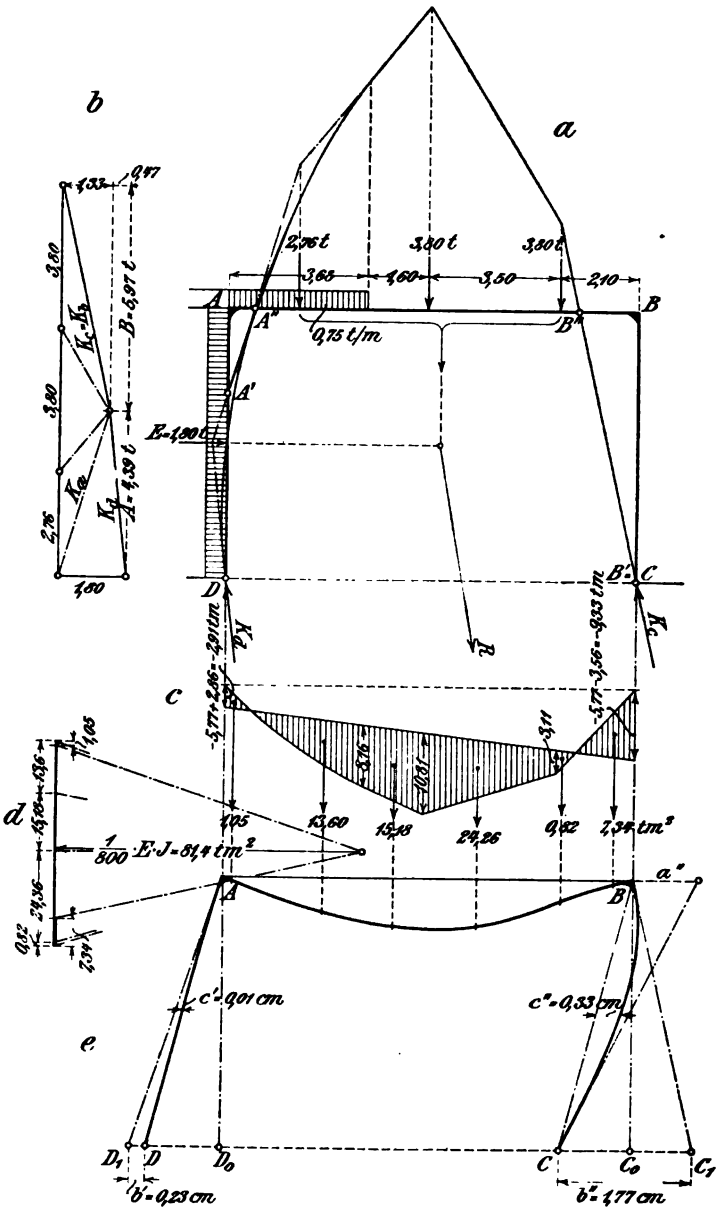


Abb. 159. Mittelkraftlinie und Biegelinie für die Verkehrsbelastung der Rahmenbrücke.

Für die ständige Belastung ist in Abb. 158b zunächst der Kräfteplan mit Hilfe der aus Abb. 157b sich ergebenden Stützkräfte $A = Q_A' = 13{,}06$ t $= B$ und $X = Q_D' = 16{,}44$ t aufgetragen. Im Punkt D beginnend, erhält man nunmehr den Linienzug $DFGF'G'$ dadurch, daß man jeweils Parallele zu den Kräften K_d, K_a, K_b und K_c bis zu den Schnittpunkten mit den Mittelkräften $E_1 + E_2$ und gl zieht. Da die wirklichen Rahmenbelastungen jedoch nicht als Einzellasten, sondern verteilt wirken, gibt dieser Linienzug nur die Endtangenten an die Mittelkraftlinien, die durch Einzeichnen der den Momentlinien ähnlich gekrümmten Linien DA'', $A'B'$ und $B''C$ erhalten werden.

Die in Abb. 158c dargestellte Biegelinie für ständige Belastung ergibt sich dadurch, daß nach den Anleitungen S. 87 u. 129 die Tangentenabschnitte a und b sowie die Pfeilhöhen c für jeden Stab berechnet und über dem Rahmennetz $DABC$ aufgetragen werden. Als Elastizitätsmaß ist $E = 210\,000$ kg/qcm $= 2\,100\,000$ t/qm angenommen worden.[1]) Zur Probe müssen die Endtangenten in den Ecken A und B rechte Winkel einschließen.

Die in Abb. 159a dargestellte Mittelkraftlinie für die Verkehrsbelastung mit dem zugehörigen Kräfteplan (Abb. 159b) ist nach dem gleichen Verfahren wie für die ständige Belastung gezeichnet. Infolge der unsymmetrischen Anordnung der Balkenlasten und der einseitigen Pfostenbelastung weicht sie nur in der Form von den bisher gezeigten ab, bedarf aber im übrigen keiner näheren Erläuterung. Um endlich die Biegelinie des Rahmens für die Verkehrsbelastung zu bestimmen, ist zunächst die Biegelinie des Balkens AB in Abb. 159e als Seillinie aus der Momentenfläche der Abb. 159c zeichnerisch nach dem bekannten Mohrschen Verfahren zu ermitteln, wobei die Eckmomente der Abb. 159c den Linien M_{I} und M_{II}' der Abb. 157c zu entnehmen sind. Sodann werden auf den Endtangenten in den Ecken A und B die Lote errichtet, die die Grundlinie in den Punkten D_1 und C_1 treffen. Die für die Pfosten nach S. 130 berechneten Tangentenabschnitte a und b sind nunmehr von diesen Punkten D_1 und C_1 aus unter Berücksichtigung des Vorzeichens aufzutragen, wodurch sich die verschobenen Rahmenfußpunkte D und C ergeben. Eine vorzügliche Probe besteht darin, daß $DC = AB$ sein muß.

Da als Längenmaßstab $\frac{1}{200}$ gewählt wurde, die Ausbiegungen aber vierfach vergrößert sind, ist die Biegungslinie 800 fach verzerrt gezeichnet. Im Kräfteplan (Abb. 159d) mußte daher die Polweite zu $\frac{1}{800} EJ = \frac{2\,100\,000 \cdot 0{,}0310}{800} = 81{,}4$ tm² gewählt werden, um die gleiche Verzerrung zu erhalten.

---

[1]) Wie aus dem Versuchsergebnis S. 98 hervorgeht, entspricht den üblichen Eisenspannungen von etwa 1000 kg/qcm eine Elastizitätsziffer von etwa 210 000 kg/qcm, also die Zahl $n = 10$. Es ist daher zur Bestimmnng von Formänderungen mit diesen Werten zu rechnen, anstatt mit $E = 140\,000$ kg/qcm und $n = 15$, die nur für den Bruchzustand gelten.

B. Berechnung für den festgespannten Rahmen.

Der Rechnungsgang ist genau der gleiche wie unter A. für den Gelenkrahmen, nur sind hier jeweils die Werte des Einspannungsgrades für alle 4 Rahmenpunkte zu ermitteln.

Die Festwerte für den eingespannten Rahmen sind mit $\nu = 1{,}19$

$$\alpha = \alpha_2 = 2 + \nu = 3{,}19 \quad \text{und} \quad \beta = \beta_2 = 1 + 6\nu = 8{,}14.$$

a) Berechnung der Eckmomente für die ständige Last (vgl. Abb. 155).

α) Gleichmäßig verteilte Last auf den Balken: $g = 2{,}40$ tm; $\mathfrak{M} = 35{,}51$ tm.

Nach Gleichung 10) wird

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{4}{3\alpha} = -\frac{4}{9{,}57} = -0{,}418; \quad M_A = M_B = -14{,}80 \text{ tm}$$

$$\mu_C = \mu_D = +\frac{2}{3\alpha} = +0{,}209; \quad M_C = M_D = +7{,}40 \text{ tm}$$

β) Dreiecklast auf dem Pfosten beiderseitig mit $\mathfrak{M}_K = -62{,}0$ tm.

Infolge der symmetrischen Lastanordnung wird mit

$$\mu'_{A,B} = \mu_A + \mu_B \text{ bezw. } \mu'_{C,D} = \mu_C + \mu_D$$

nach Gleichung 14) der Zusammenstellung am Schlusse

$$\mu'_{A,B} = \frac{\nu}{20\alpha\beta}[-(28 + 3\nu) + (32 + 27\nu)]$$

$$= \frac{\nu}{20\alpha\beta}(4 + 24\nu) = +\frac{\nu}{5\alpha} = +\frac{1{,}19}{5 \cdot 3{,}19} = +0{,}075$$

$$\mu'_{C,D} = \frac{1}{20\alpha\beta}[-(12 + 49\nu + 27\nu^2) + (28 + 151\nu + 63\nu^2)]$$

$$= \frac{1}{20\alpha\beta}(16 + 102\nu + 36\nu^2) = \frac{8 + 3\nu}{10\alpha} = +\frac{11{,}57}{31{,}90} = +0{,}363.$$

$$M_A = M_B = -4{,}65 \text{ tm}; \quad M_C = M_D = -22{,}50 \text{ tm}.$$

γ) Gleichförmig verteilte Last auf die Pfosten beiderseitig mit $\mathfrak{M}_K = -18{,}2$ tm.

Wie vorher wird nach Gleichung 13)

$$\mu'_{A,D} = \mu_A + \mu_B = \frac{\nu}{12\alpha\beta}[-(23 + 6\nu) + (25 + 18\nu)]$$

$$= \frac{\nu}{12\alpha\beta}(2 + 12\nu) = \frac{\nu}{6\alpha} = \frac{1{,}19}{19{,}14} = +0{,}0622$$

$$\mu'_{C,D} = \mu_C + \mu_D = \frac{1}{12\alpha\beta}[-(9 + 35\nu + 18\nu^2) + (15 + 73\nu + 30\nu^2)]$$

$$= \frac{1}{12\alpha\beta}(6 + 38\nu + 12\nu^2) = \frac{3 + \nu}{6\alpha} = \frac{3{,}57}{19{,}14} = 0{,}1865.$$

$$M_A = M_B = -1{,}13 \text{ tm}; \quad M_C = M_D = -3{,}40 \text{ tm}.$$

δ) Zusammen wird daher von der ständigen Last

$$M_A = M_B = -14{,}80 - 4{,}65 - 1{,}13 = 20{,}58 \text{ tm}$$
$$M_C = M_D = +7{,}40 - 22{,}50 - 3{,}40 = -18{,}50 \text{ tm}$$

b) Die Berechnung der Eckmomente für die Verkehrslast (vergl. Abb. 156).

α) Für den Lastenzug, der aus zwei Einzellasten und einer anschließenden gleichförmig verteilten Last besteht, sind nach Gleichung 8) die Werte der Einspannungsgrade:

$$\mu_A = -\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\frac{1}{\beta}$$
$$\mu_B = -\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\frac{1}{\beta}$$
$$\mu_C = +\frac{1}{2\alpha} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\frac{1}{\beta}$$
$$\mu_D = +\frac{1}{2\alpha} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\frac{1}{\beta}, \text{ wobei } \xi = \frac{x}{l} \text{ ist.}$$

Da μ somit bei jeder Aenderung der Laststellung seinen Wert ändert und wir hier keine feste Laststellung betrachten, sondern einen Größtwert suchen wollen, so ergibt sich für $M_A = \Sigma \cdot \frac{Pab}{l} \cdot \mu_A$ ein verhältnismäßig verwickelter Ausdruck. Die Durchführung dieser genauen Berechnung führt zu folgendem Ergebnis: Größtwerte der Eckmomente, wenn die gleichmäßig verteilte Last, wie in Abb. 156, links von den Einzellasten steht:

$$\max M_A = -6{,}44 \text{ tm für } x = 2{,}99 \text{ m}$$
$$\max M_B = -6{,}55 \text{ tm „ } x = 3{,}49 \text{ m}$$
$$\max M_C = +3{,}20 \text{ tm „ } x = 2{,}64 \text{ m}$$
$$\max M_D = +3{,}32 \text{ tm „ } x = 3{,}65 \text{ m}$$

Größtwert des positiven Balkenmomentes ist

$$+M_{max} = +10{,}0 \text{ t/m für } x = 3{,}69 \text{ m,}$$

dabei wird

$$M_A = -6{,}35 \text{ tm} \qquad M_C = +3{,}13 \text{ tm}$$
$$M_B = -6{,}53 \text{ tm} \qquad M_D = +3{,}31 \text{ tm}$$

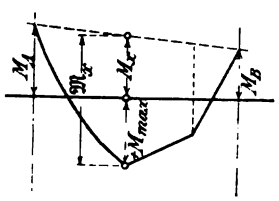


Abb. 160.

Vergleicht man nun die Werte M_A und M_B sowie die Werte M_C und M_D miteinander, so findet man, daß der Unterschied nur $1\frac{1}{2}$ bezw. 4 vH. beträgt. Da nun das positive Maximalmoment nach Abb. 160 $+M_{max} = \mathfrak{M}_x - M_x$ und M_x unter der mittelsten Last fast genau das arithmetische Mittel von M_A und M_B ist, so genügt es für den Balken offenbar vollkommen, wenn statt der genauen Werte von M_A und M_B das arithmetische Mittel beider eingeführt wird. Der Wert des Einspannungsgrades für den Balken ergibt sich somit aus Gleichung 8) zu

$$\mu'_{A,B} = \frac{\mu_A + \mu_B}{2} = -\frac{1}{\alpha},$$

wobei also das zweite Glied mit ξ vollständig verschwindet und die Formeln dieselbe Einfachheit annehmen wie beim Gelenkrahmen.

Für die Pfostenfüße würde die gleiche Vereinfachung einen Fehler von etwa 2 vH. ergeben, der wohl in Kauf genommen werden kann. Damit wird

$$\mu'_{C,D} = \frac{\mu_C + \mu_D}{2} = + \frac{1}{2\alpha} = - \frac{\mu'_{A,B}}{2}.$$

Mit dieser Vereinfachung erhält man

$$\max M_A = \max M_B = - \frac{1}{\alpha} \cdot \Sigma \cdot \frac{Pab}{l} = - \frac{1}{3{,}19} \cdot \frac{225{,}97}{10{,}88} = - 6{,}80 \text{ tm}$$

für die gleiche Laststellung wie beim Gelenkrahmen (vergl. Punkt $Ab\alpha$, S. 137) und weiter

$$\max M_C = \max M_D = - \frac{\max M_A}{2} = + 3{,}40 \text{ tm}.$$

Für den positiven Größtwert des Balkenmomentes wird unter Benutzung der für den Gelenkrahmen gefundenen Momentengleichungen, die auch hier gelten:

$$+ M_{\max} = \mathfrak{M} + M_A = \frac{1}{l} (- 0{,}375\, x^3 - 4{,}12\, x^2 + 45{,}07\, x + 91{,}57) - \frac{1}{\alpha l} (- 0{,}25\, x^3 - 3{,}52\, x^2 + 31{,}77\, x + 168{,}44),$$

also mit $\alpha = 3{,}19$ und $l = 10{,}88$ m:

$$+ M_{\max} = \frac{1}{10{,}88} (- 0{,}296\, x^3 - 3{,}02\, x^2 + 35{,}11\, x + 38{,}77),$$

und zwar für $x = 3{,}75$ m:

$$+ M_{\max} = 10{,}32 \text{ tm},$$

wobei

$$M_A = M_B = - 6{,}48 \text{ tm} \quad \text{und} \quad M_C = M_D = + 3{,}24 \text{ tm}.$$

Die Unterschiede dieser angenäherten Werte gegenüber den genauen Werten sind daher + 3,2 vH., + 2,0 vH., − 0,7 vH., + 3,4 vH. und − 2,2 vH., also sehr gering.

β) Für einseitigen Erddruck infolge der Verkehrsbelastung (Abb. 156) wird mit $\mathfrak{M}_k = - 6{,}42$ tm nach Gleichung 13):

$$\mu_A = - \frac{\nu}{12\,\alpha_2 \beta_2} (23 + 6\nu) = - \frac{1{,}19}{12 \cdot 3{,}19 \cdot 8{,}14} \cdot 30{,}14 = - 0{,}115$$

$$\mu_B = + \frac{\nu}{12\,\alpha_2 \beta_2} (25 + 18\nu) = + \frac{1{,}19}{311{,}6} \cdot 46{,}42 = + 0{,}177$$

$$\mu_C = - \frac{1}{12\,\alpha_2 \beta_2} (9 + 35\nu + 18\nu^2) = - \frac{1}{311{,}6} \cdot 76{,}10 = - 0{,}244$$

$$\mu_D = + \frac{1}{12\,\alpha_2 \beta_2} (15 + 73\nu + 30\nu^2) = + \frac{1}{311{,}6} \cdot 144{,}4 = + 0{,}464,$$

also

$$M_A = \mu_A \cdot \mathfrak{M}_K = + 0{,}74 \text{ tm} \qquad M_C = + 1{,}56 \text{ tm}$$
$$M_B = - 1{,}14 \text{ tm} \qquad M_D = - 2{,}98 \text{ tm}.$$

c) Die Ergebnisse dieser Rechnung

sind in Abb. 161 für eine Rahmenhälfte in der gleichen Weise aufgetragen, wie es in Abb. 157 für den Gelenkrahmen geschehen war. Ein Vergleich der für die Bemessung des Rahmens maßgebenden

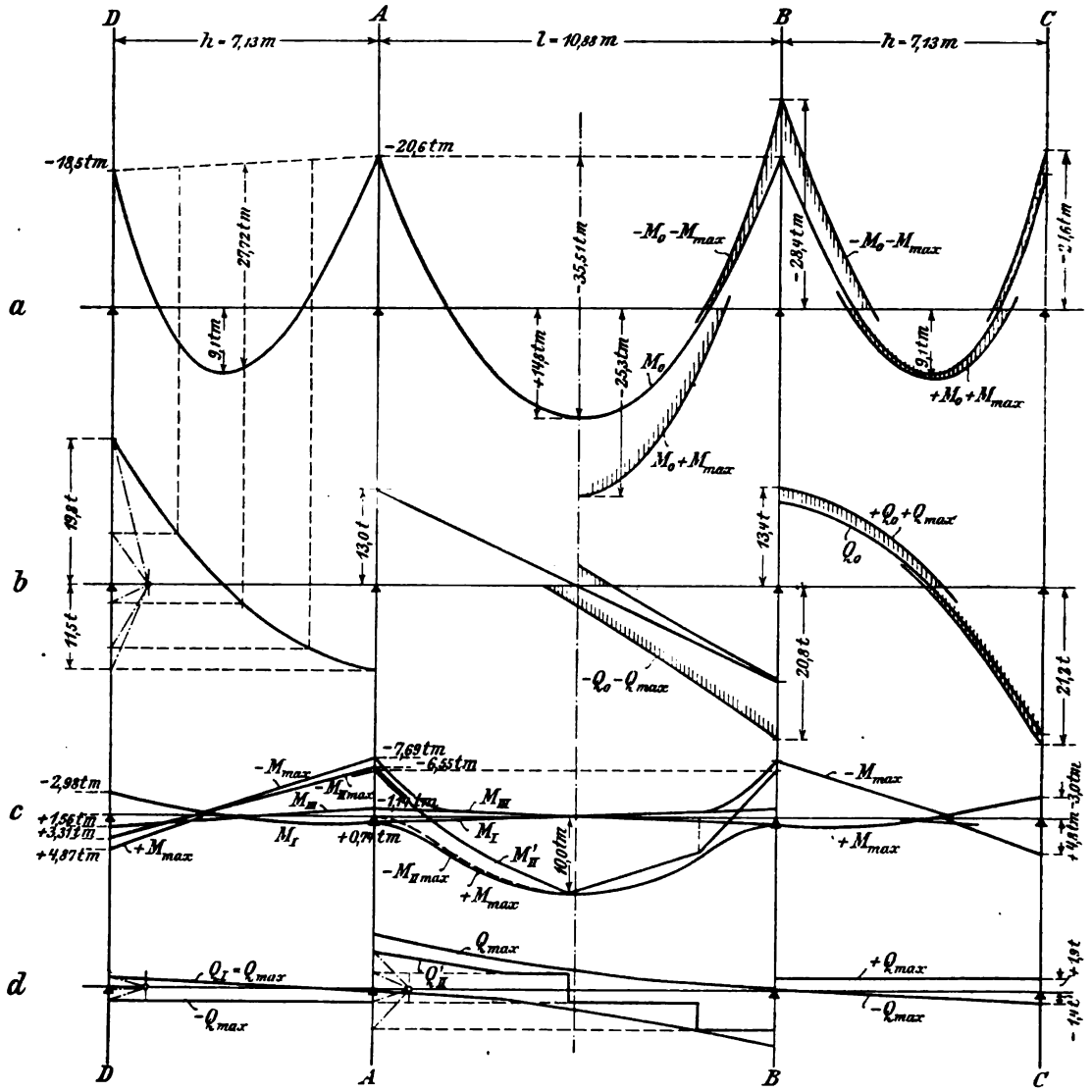


Abb. 161. Biegungsmomente und Querkräfte für die als festeingespannter Rahmen betrachtete Rahmenbrücke.

Biegungsmomente bei beiden Grundformen zeigt, daß infolge der Einspannung der Pfostenfüße eine weitergehende Ausgleichung der positiven und negativen Werte erreicht wird, während die Querkräfte in beiden

Fällen annähernd die gleichen sind. Besonders bemerkenswert ist, daß im zweiten Falle das positive Biegungsmoment in Balkenmitte von der ständigen Last um etwa 40 vH. vergrößert, das von der Verkehrslast nur etwa 11 vH. verringert erscheint, was für das Gesamtmoment einer Vergrößerung um etwa 16 vH. entspricht, während für die größten Eckmomente bei A und B eine Verringerung um etwa 20 vH. festzustellen ist.

II. Beispiel. Gelenkrahmen mit geknickter Balkenachse für ein Hallendach.

Für den in Abb. 162 dargestellten Dachbinder einer Wagenhalle für die Leipziger Außenbahn-Aktiengesellschaft in Schkeuditz sind die Biegungsmomente und Querkräfte infolge des Eigengewichtes sowie der Schnee- und der Windlasten zu ermitteln.

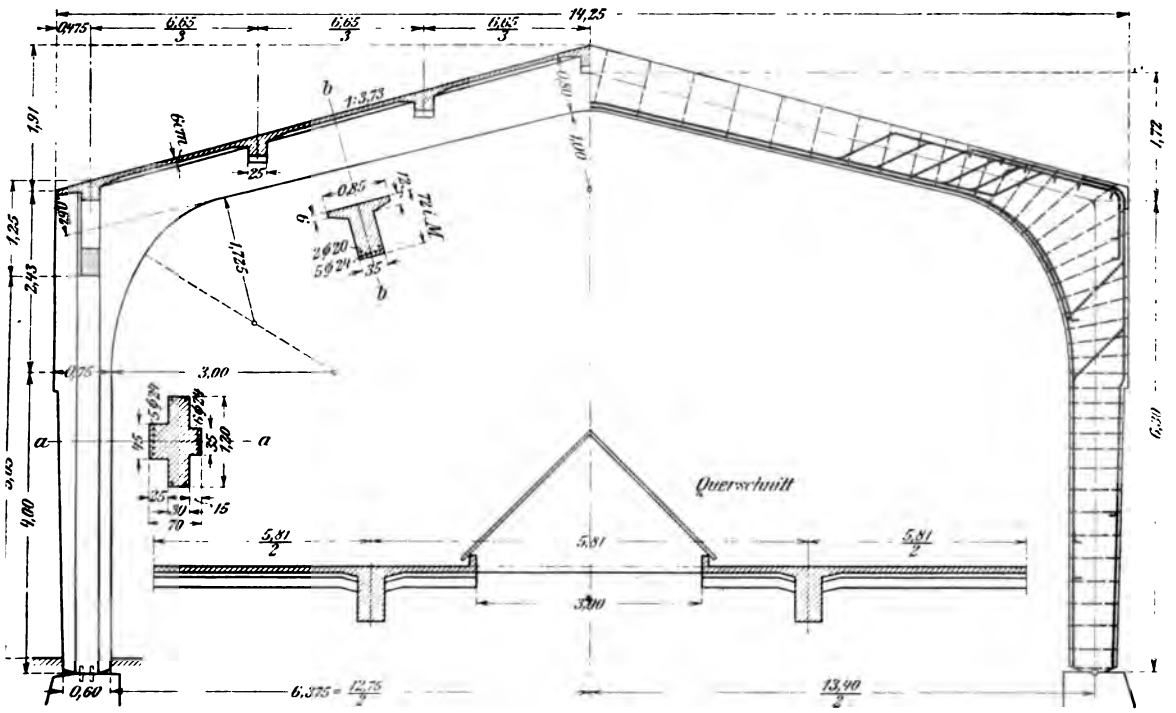


Abb. 162. Rahmenbinder einer Wagenhalle.

1. Die Rahmenabmessungen und Bemessungsgrößen.

Während die Pfosten einen kreuzförmigen Querschnitt aufweisen, ist der der Dachform angepaßte gebrochene Balken mit der Decke fest verbunden und besitzt daher einen T-förmigen Querschnitt. Seine Druckgurtbreite ist auf ein Drittel des Binderabstandes von 5,81 m, also zu rd. 1,95 m angenommen worden.

Für diese Abmessungen ergeben sich die Querschnittsflächen und Trägheitsmomente mit den Bezeichnungen der Abb. 163a und b wie folgt:

Flächenteil	F cm²	s cm	$F \cdot s$ cm³	J cm⁴
Balken				
I	$160 \cdot 6 = 960$	3,0	2 880	$2980 + 960 \cdot 23{,}1^2 = 515\,150$
II	$35 \cdot 72 = 2520$	36,0	90 720	$1088640 + 2520 \cdot 9{,}9^2 = 1\,335\,600$
III	$25 \cdot 6 = 150$	8,0	1 200	$300 + 150 \cdot 18{,}1^2 = 49\,440$
	3630	26,1	94 800	1 900 190
Pfosten				
I	$45 \cdot 25 = 1125$	12 5	14 060	$58\,590 + 1125 \cdot 23{,}9^2 = 701\,200$
II	$120 \cdot 30 = 3600$	40,0	144 000	$270\,000 + 3600 \cdot 3{,}6^2 = 316\,700$
III	$35 \cdot 15 = 525$	62,5	32 810	$98\,300 + 525 \cdot 26{,}1^2 = 455\,900$
	5250	36,4	190 870	1 473 800

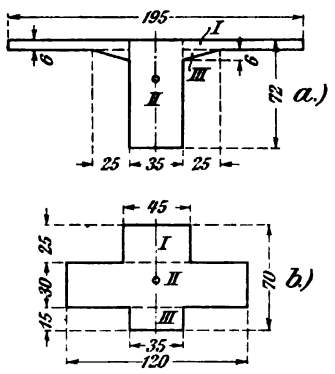


Abb. 163. Querschnitte des Balkens und Pfostens.

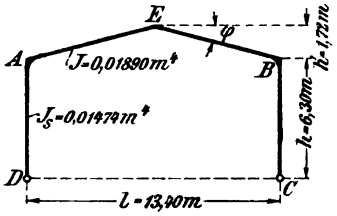


Abb. 164.

Wird nun die Schwerlinie des Rahmens in die Abb. 162 eingetragen, so erhält man das der Rechnung zugrunde zu legende Netzbild des Rahmens nach Abb. 164 und daraus nach S. 115 die dem Rahmen mit gebrochenem Balken eigentümlichen Festwerte:

$$\lambda = \frac{h'}{h} = \frac{1{,}72}{6{,}30} = 0{,}273; \qquad \cos\varphi = \frac{6{,}70}{\sqrt{6{,}70^2 + 1{,}72^2}} = 0{,}9686;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \cdot 1{,}72}{13{,}40} = 0{,}2567 \quad \text{und} \quad \varphi = 20^\circ\,30',$$

also

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{Js} \cdot \cos\varphi = \frac{6{,}30}{13{,}40} \cdot \frac{0{,}01900}{0{,}01474} \cdot 0{,}9686 = 0{,}585$$

$$\alpha = (2\nu + 3) + \lambda(3 + \lambda) = 4{,}17 + 0{,}273 \cdot 3{,}273 = 5{,}06.$$

2. Die Belastungen des Rahmens.

a) Ständige Last, und zwar

Eigengewicht des Binders

$$g = 0{,}363 \cdot 2400 = 870 \text{ kg/m} = 0{,}87 \text{ t/m}.$$

Gewicht der übrigen Deckenteile, das in den Anschlußpunkten der Längsträger vereinigt anzunehmen ist, also unter Vernachlässigung der Oberlichtausschnitte für jeden Anschlußpunkt (vergl. Abb. 162):

$$G = \left[\frac{6{,}65}{3} \cdot 0{,}06\,(5{,}81 - 1{,}95) + 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 5{,}81\right] 2400 = 2280 \text{ kg}$$
$$= \text{rd. } 2{,}30 \text{ t.}$$

b) Schneelast, ebenfalls in den Anschlußpunkten der Längsträger vereinigt, mit je

$$S = \frac{6{,}65}{3} \cdot 5{,}81 \cdot 0{,}75 = 970 \text{ kg} = \text{rd. } 1{,}00 \text{ t.}$$

c) Winddruck auf die Dachfläche mit

$$w = 150 \cdot \sin^2(20^\circ\,30' + 10^\circ)$$
$$= 38{,}5 \text{ kg/qm,}$$

also lotrechte Seitenkraft für jeden Längsträgeranschluß

$$W_v = \frac{6{,}65}{3} \cdot 5{,}81 \cdot 38{,}5 \cdot \cos\varphi = 480$$
$$= \text{rd. } 500 \text{ kg,}$$

wagerechte Seitenkraft desgleichen

$$W_h = W_v \cdot \operatorname{tg}\varphi = 500 \cdot 0{,}2567$$
$$= \text{rd. } 130 \text{ kg.}$$

d) Der Winddruck auf die Seitenwand wirkt mit

$$w_h = 1{,}20 \cdot 150 = 180 \text{ kg/m}$$

gleichförmig verteilt unmittelbar auf den Pfosten, der Winddruck auf die übrige Wandfläche wird dagegen mit

$$H = 150\,(5{,}81 - 1{,}20)\left(1{,}25 + \frac{5{,}05}{2}\right)$$
$$= 2610 \text{ kg} = 2{,}60 \text{ t}$$

auf den oberen Wandbalken, also etwa in der Höhe $r = 5{,}90$ m, angreifend angenommen. Damit ergeben sich die in Abb. 165a bis c dargestellten Lastenbilder für den Rahmen, wobei die nur für den Stützendruck maßgebenden Lasten des oberen Wandbalkens nach Abb. 162 ermittelt worden sind.

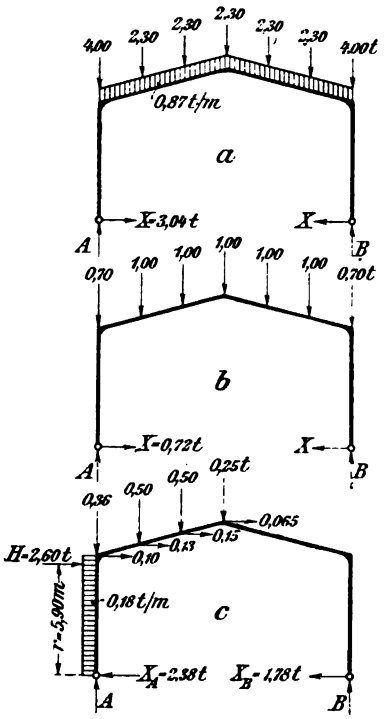


Abb. 165.

8. Die Berechnung der Eckmomente.

Diese ergeben sich für die Ecken A und B unmittelbar aus den μ-Werten der Uebersicht S. 115. Für die Berechnung der übrigen Balkenmomente ist jedoch noch der Rahmenschub X zu ermitteln, der sich am einfachsten am unbelasteten Pfosten zu

$$X = \frac{M_B}{h} = \mu_B \cdot \frac{\mathfrak{M}}{h}$$

berechnet. Diese Größe X wird bei der Auftragung der Momentenlinie verwendet.

a) Für die gleichförmig verteilte Belastung des Balkens ist

$$\mathfrak{M} = \frac{g l^2}{8}$$

und nach Gleichung 19d (S. 115)

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{2+\lambda}{\alpha} = -\frac{2{,}273}{5{,}06} = -0{,}449$$

also

$$X_A = X_B = -\frac{0{,}449\, g l^2}{8\, h} = -\frac{0{,}449 \cdot 13{,}40^2}{8 \cdot 6{,}30} \cdot g l = -0{,}119\, g l.$$

Für

$$g l = 0{,}87 \cdot 13{,}40 = 11{,}66 \text{ t}$$

wird demnach

$$X_A = X_B = -1{,}39 \text{ t}.$$

b) Für die lotrechten Pfettenlasten, die in den Sechstelpunkten angreifen, wird mit $\xi = \frac{n}{6}$

$$\mathfrak{M} = Pl \cdot \frac{n}{6} \cdot \frac{6-n}{6} = P \cdot 0{,}372 \cdot n\,(6-n)$$

und nach Gleichung 19 (S. 115)

$$\mu = -\frac{3}{2\alpha} - \frac{\lambda}{4\alpha} \cdot \frac{3-4\xi^2}{1-\xi} = -\frac{3}{10{,}12} - \frac{0{,}273}{20{,}24} \cdot \frac{2\,(27-n^2)}{3\,(6-n)}$$

$$= -0{,}296 + 0{,}0091 \cdot \frac{27-n^2}{6-n},$$

also mit

$n = 1$ wird	$\mathfrak{M} = 1{,}861\, P$	$\mu = -0{,}343;$	$M_A = \mu\, M_A = 0{,}6380\, P$
$n = 2$ „	$= 2{,}977\, P$	$= -0{,}348;$	$= 1{,}0355\, P$
$n = 3$ „	$= 3{,}350\, P$	$= -0{,}350;$	$= 1{,}1725\, P$
$n = 4$ „	$= 2{,}977\, P$	$= -0{,}348;$	$= 1{,}0355\, P$
$n = 5$ „	$= 1{,}861\, P$	$= -0{,}343;$	$= 0{,}6380\, P$
			$\Sigma M_A = -4{,}5195\, P$

und $$X_A = X_B = \frac{M_A}{h} = -\frac{4{,}52\, P}{6{,}30} = -0{,}717\, P.$$

Demnach wird für die ständigen Pfettenlasten $G = 2{,}30$ t

$$X_A = X_B = -0{,}717 \cdot 2{,}30 = -1{,}65 \text{ t}.$$

c) Für die Schneebelastung $S = 1$ t wird in gleicher Weise

$$X_A = X_B = -0{.}72 \text{ t}.$$

d) Für die lotrechten Seitenkräfte $W_r = 0{,}50$ t des Winddruckes, welcher nur die eine Hälfte der Dachfläche trifft, wird ebenso

$$X_A = X_B = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}717 \cdot 0{,}50 = -0{,}18 \text{ t}.$$

e) Wagerechte Seitenkräfte des Winddruckes.

Für $\eta = 1$ wird

$$\mathfrak{M}_k = -Ph = -0{,}10 \cdot 6{,}30 = -0{,}63 \text{ t/m}$$

und nach Gleichung 20b (S. 115)

$$\mu = \frac{3}{4}\,\frac{2+\lambda}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2{,}273}{5{,}06} + \frac{0{,}585}{5{,}06} = +0{,}453$$

$$M_B = -0{,}285 \text{ t/m}; \qquad X_B = -0{,}045 \text{ t}; \qquad X_A = +0{,}055 \text{ t}.$$

Für $\eta = 1 + \frac{\lambda}{3} = 1{,}091$ wird

$$\mathfrak{M}_k = -Ph\eta = -0{,}13 \cdot 6{,}30 \cdot 1{,}091 = -0{,}89 \text{ t/m}$$

und nach Gleichung 20 (S. 115)

$$\mu_B = \frac{3}{4}\,\frac{2+\lambda}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha\eta} - \frac{2 - 3\eta + \eta^3}{4\,\alpha\eta\lambda} = 0{,}442$$

$$M_B = -0{,}395 \text{ tm}; \qquad X_B = -0{,}063 \text{ t}; \qquad X_A = +0{,}067 \text{ t}.$$

Für $\eta = 1 + 2\,\frac{\lambda}{3} = 1{,}182$ wird

$$\mathfrak{M}_k = -0{,}13 \cdot 6{,}30 \cdot 1{,}182 = -0{,}968 \text{ tm}$$

und nach derselben Gleichung 20 (S. 115)

$$\mu_B = +0{,}431$$

$$M_B = -0{,}417 \text{ tm}; \qquad X_B = -0{,}066 \text{ t}; \qquad X_A = +0{,}064 \text{ t},$$

für $\eta = 1 + \lambda = 1{,}273$ wird $\mathfrak{M}_k = -0{,}065 \cdot 8{,}02 = -0{,}52$ tm

$$\mu_B = \frac{1}{2\,(1+\lambda)} = \frac{1}{2 \cdot 1{,}273} = +0{,}393$$

$$M_B = -0{,}204 \text{ tm}; \qquad X_B = -0{,}032 \text{ t}; \qquad X_A = +0{,}033 \text{ t}.$$

Zusammen wird

$$M_B = -1{,}301 \text{ tm}; \qquad X_B = -0{,}206 \text{ t}; \qquad X_A = 0{,}219 \text{ t}.$$

f) Für die gleichförmig verteilte Windbelastung des Pfostens $w = 0{,}18$ t/m also $W = 0{,}18 \cdot 6{,}30 = 1{,}133$ t wird

$$\mathfrak{M}_k = -0{,}18 \cdot \frac{6{,}30^2}{2} = -3{,}58 \text{ tm}$$

und nach Gleichung 21a (S. 115)

$$\mu_B = \frac{3}{4} \cdot \frac{2+\lambda}{\alpha} + \frac{5}{4}\,\frac{\nu}{\alpha} = \frac{3 \cdot 2{,}273 + 5 \cdot 0{,}585}{4 \cdot 5{,}06} = 0{,}481$$

$$M_B = -1{,}72 \text{ tm}; \quad X_B = -0{,}273 \text{ t}; \quad X_A = 1{,}133 - 0{,}273 = 0{,}860 \text{ t}.$$

g) Für die wagerechte Einzellast vom Winddruck $H = 2{,}60$ t wird

$$\mathfrak{M}_k = -2{,}60 \cdot 5{,}90 = -15{,}34 \text{ tm}; \qquad \eta = \frac{5{,}90}{6{,}30} = 0{,}938$$

und nach Gleichung 21 (S. 115)

$$\mu_B = \frac{3}{4}\,\frac{2+\lambda}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha}\,\frac{3-\eta^2}{2} = 0{,}460$$

$$M_B = -7{,}06 \text{ tm}; \quad X_B = -1{,}12 \text{ t}; \quad X_A = 2{,}60 - 1{,}12 = 1{,}48 \text{ t}.$$

h) Insgesamt wird daher
vom Winddruck

$$X_B = -0{,}18 - 0{,}206 - 0{,}273 - 1{,}120 = -1{,}78 \text{ t}$$
$$X_A = -0{,}18 + 0{,}219 + 0{,}860 + 1{,}480 = +2{,}38 \text{ t},$$

von der ständigen Last

$$X_A = X_B = -1{,}39 - 1{,}65 = -3{,}04 \text{ t},$$

von der Schneebelastung der ganzen Dachfläche

$$X_A = X_B = -0{,}72 \text{ t},$$

von der Schneebelastung einer Dachhälfte

$$X_A = X_B = -0{,}36 \text{ t}.$$

4. Die Auftragung der Biegungsmomente

erfolgt in Abb. 166a derart, daß zunächst auf die gestreckte Rahmenachse die positive Momentenfläche des einfachen Balkens angesetzt und von dieser die negative Fläche der Einspannmomente abgezogen wird.

a) Ständige Last. Das einfache Moment in Balkenmitte ist nach Abb. 164a

$$\mathfrak{M} = g \cdot l \frac{l}{8} + G \frac{l}{6}\left(1 + 2 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{11{,}66}{8} + 2{,}30 \cdot \frac{9}{12}\right) \cdot 13{,}40$$
$$= 42{,}65 \text{ tm}.$$

Die Momentenlinie ist ein der Parabel eingeschriebenes Vieleck, dessen Seiten aber nicht durch Gerade, sondern durch Parabeln gebildet sind, die dem Eigengewicht des Balkens entsprechen und die Pfeilhöhen

$$m = \frac{g}{8}\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{0{,}87 \cdot 13{,}4^2}{288} = 0{,}54 \text{ tm}$$

besitzen. Die Eckmomente berechnen sich aus $X = -3{,}04$ t, nach Punkt 3h zu

$$M_A = M_B = X \cdot h = -3{,}04 \cdot 6{,}30 = -19{,}15 \text{ tm}$$

und

$$M_E = X(h + h') = -3{,}04 \cdot 8{,}02 = -24{,}38 \text{ tm}.$$

b) Schneelast. Bei Vollbelastung des Daches (Abb. 164b) mit Schnee ist das einfache Balkenmoment in der Mitte

$$\mathfrak{M} = Gl\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4} \cdot 1{,}0 \cdot 13{,}40 = 10{,}05 \text{ tm}$$

und die Eckmomente mit $X = -0{,}72$ t nach Punkt 3h

$$M_A = M_B = -0{,}72 \cdot 6{,}30 = -4{,}53 \text{ tm}$$
$$M_E = -0{,}72 \cdot 8{,}02 \ldots = -5{,}78 \text{ tm}$$

Für einseitige Schneelast auf der einen Dachhälfte sind diese Werte zu halbieren. Der Beweis hierfür ergibt sich aus der Ueberlegung, daß beim Gelenkrahmen infolge beliebiger lotrechter Belastung an beiden Fußpunkten jeweils gleichgroße Rahmenschübe entstehen. Der Schub X' infolge Belastung der linken Balkenhälfte muß daher gleich dem Schub X'' infolge Belastung der rechten Balkenhälfte sein. Beide Größen ergänzen sich aber zum Rahmenschub infolge der Vollbelastung $X = X' + X''$, woraus sich $X' = \frac{X}{2}$ und $M_A' = M_B' = \frac{M_A}{2}$ ergibt.

Die Auftragung dieser Momentenflächen in Abb. 166c zeigt, daß bei einseitiger Belastung an dem ersten Längsträgeranschluß ein größeres Biegungsmoment wie bei Vollbelastung (Abb. 166b) entsteht.

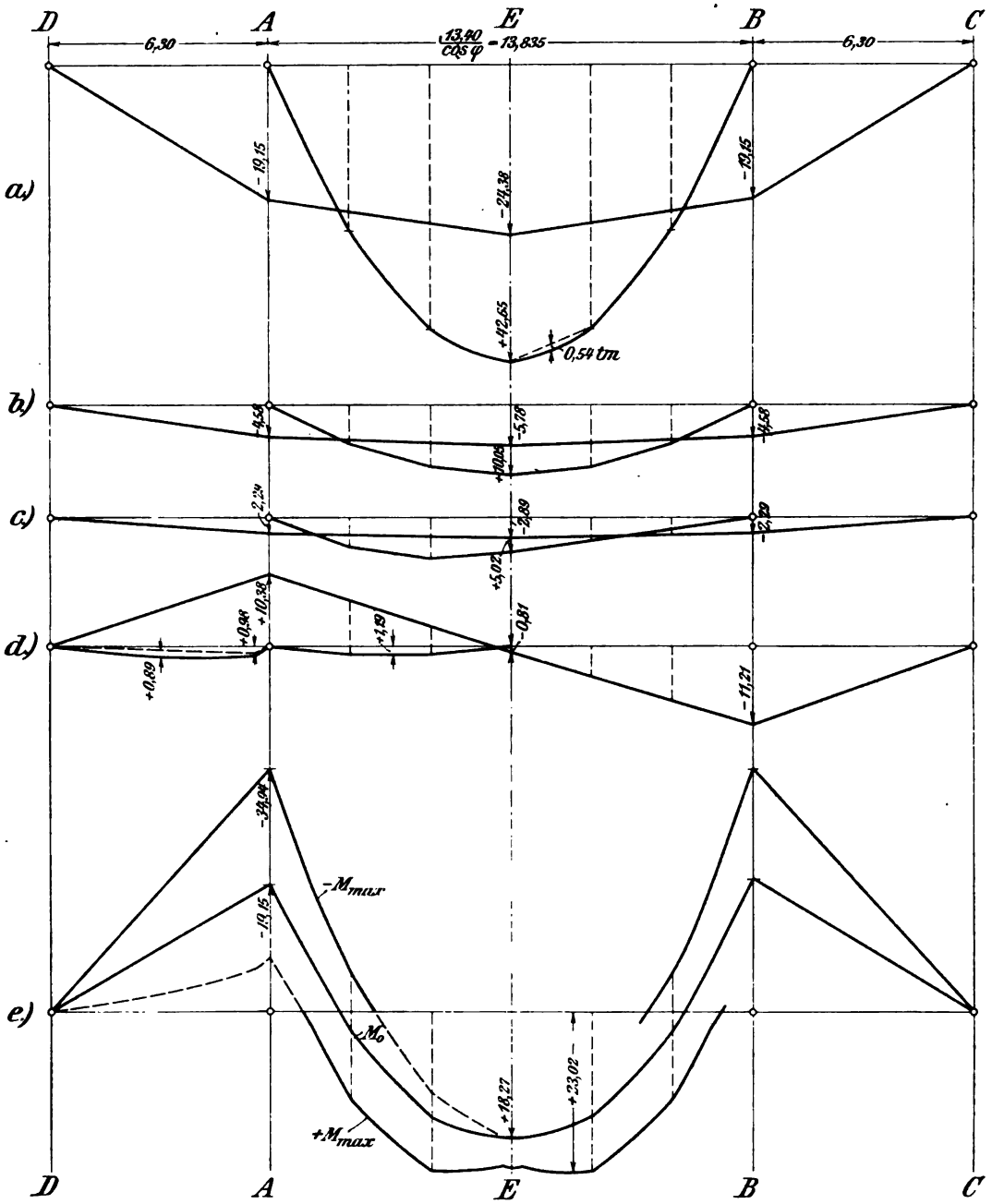


Abb. 166. Biegungsmomente des Hallenbinders.

c) Winddruck. Die Auflagerdrücke des Rahmens sind von den lotrechten Lasten (Abb. 165c):

$$B = 0{,}5\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)+\frac{0{,}25}{2} = 0{,}375 \text{ t}$$

$$A = \Sigma W_v - B = 1{,}61 - 0{,}375 = 1{,}235 \text{ t},$$

von den wagerechten Lasten:

$$B = -A = -\frac{\Sigma \mathfrak{M}_k}{l} =$$

$$= -\frac{-0{,}630-0{,}894-0{,}968-0{,}520-3{,}58-15{,}34}{13{,}40} = +1{,}635 \text{ t},$$

zusammen daher $B = +2{,}01$ t; $A = -0{,}40$ t.

Mit $X_B = -1{,}78$ t und $X_A = +2{,}38$ t nach Punkt 3h ergeben sich daher die Biegungsmomente

$$M_B = Xh = -1{,}78 \cdot 6{,}30 = -11{,}21 \text{ tm}$$

$$M_E = X_B(h+h') + \frac{Bl}{2} = -1{,}78 \cdot 8{,}02 + 2{,}01 \cdot \frac{13{,}40}{2} = -0{,}81 \text{ tm}$$

$$M_A = X_A h - \frac{wh^2}{2} - W(h-r) =$$

$$= 2{,}38 \cdot 6{,}30 - 0{,}18 \cdot \frac{6{,}30^2}{2} - 2{,}60\,(6{,}30-5{,}90) = +10{,}38 \text{ tm}.$$

Die einfachen Momente des Pfostens AD setzen sich zusammen aus einer Parabel mit der Höhe

$$\mathfrak{M}' = \frac{w \cdot h^2}{8} = \frac{0{,}18 \cdot 6{,}30^2}{8} = 0{,}89 \text{ tm}$$

und einem Dreieck mit der Höhe

$$\mathfrak{M}'' = W \cdot \frac{r(h-r)}{h} = 2{,}60 \cdot \frac{5{,}90 \cdot 0{,}40}{6{,}30} = 0{,}98 \text{ tm},$$

wogegen die einfache Momentenfläche der Balkenhälfte AE nach Abb. 165c die Höhe

$$\mathfrak{M} = W_v \cdot \frac{l}{6} + W_h \cdot \frac{h'}{3} = 0{,}50 \cdot \frac{13{,}40}{6} + 0{,}13 \cdot \frac{1{,}72}{3} = 1{,}19 \text{ tm}$$

besitzt.

In Abb. 166e ist die Momentenlinie der Abb. 166a von der Grundlinie aus nochmals aufgetragen und die Summe der Momentenflächen der Abb. 166b, c und d daran angesetzt, so daß sich damit die Umhüllenden der größten positiven und negativen Biegungsmomente ergeben. Die Linie muß symmetrisch zur Mittelachse sein, da sowohl der Wind als auch die einseitige Schneelast von beiden Seiten wirken kann.

5. Die Ermittlung der Querkräfte

ist bei diesem Beispiele am einfachsten mit Hilfe der Mittelkraftlinie durchzuführen, weil durch die Neigung der Balkenteile die rechnerische Ermittlung umständlich wird und diese Darstellung den Vorteil größerer Uebersichtlichkeit gewährt.

Nach den Erläuterungen auf S. 128 ist in Abb. 167a ein Kräfteplan für die senkrecht wirkende Last aufgetragen mit dem Polabstand $X = 3{,}04$ t. Die aus Abb. 165a zu entnehmenden Lasten sind derart eingetragen, daß die zwischen den Einzellasten $G = 2{,}30$ t liegenden gleichförmig verteilten Belastungen als Einzellasten von

$$\frac{gl}{6} = 0{,}87 \cdot \frac{13{,}4}{6} = 1{,}94 \text{ t}$$

eingesetzt und in der Mitte dieser Laststrecken wirkend gedacht sind. Die zugehörige Mittelkraftlinie ergibt sich sodann als Seilzug, der vom Punkte D ausgehend zu zeichnen ist und zur Probe im Punkte C enden muß.

Für den Schnitt unmittelbar links vom Punkt m des Balkenteils AE ergibt sich die Mittelkraft ed durch Zusammensetzung der als Linienzug $eabd$ sich darstellenden äußeren Kräfte links vom Schnitt, und zwar 1,94 t, 4,0 t, A und X. Durch Zerlegung parallel und rechtwinklig zur Stabachse AE erhält man die Längskräfte ef und die Querkraft fd, welche über der Stabachse als Strecke mm' aufgetragen ist. Auf diese Weise ergibt sich die in Abb. 167b als schraffierte Fläche eingetragene Darstellung der Querkräfte für sämtliche Rahmenpunkte. Außerdem aber kann für jeden Schnitt ohne weiteres aus dem Kräfteplan die zugehörige Längskraft, z. B. ef für den Schnitt m, entnommen werden.

Diese Querkraftlinie ist in Abb. 167g nochmals über einer wagerechten Grundlinie aufgetragen worden.

Die in Abb. 167c und 167d dargestellten Kräftepläne für volle und einseitige Schneelast sind in gleicher Weise zu verwerten. In Abb. 167g wurden nur die Werte für Vollast eingetragen, da die Werte für einseitige Belastung überall kleiner sind.

Der Kräfteplan für den von links her wirkenden Winddruck ist in Abb. 167e dargestellt, wobei die im Linienzug a bis g aufgetragenen Kräfte denen der Abb. 165c entsprechen. Der Pol o des Kräfteplans ergibt sich dadurch, daß man den lotrechten Stützendruck A als Strecke ha und den Rahmenschub X_A als Strecke oh aufträgt. Zur Probe muß sodann $io = X_b$ und $gi = B$ sein.

Vom Punkt D des Rahmens ausgehend, ist in Abb. 167f nunmehr der Seilzug $Da'b' \ldots f'C$ gezeichnet, der zur Probe im Punkte C enden muß. Erwähnt sei noch, daß der Einfachheit halber die zwischen der Kraft H und dem Punkt A angreifende gleichförmig verteilte Belastung zur Hälfte der Kraft H, zur anderen Hälfte der Einzellast in A zugeschlagen worden ist, was in der schräg zu AE gerichteten Lage der Kraft cd im Kräfteplan und der Kraftrichtung $c'A$ zum Ausdruck kommt.

Für den Schnitt unmittelbar links vom Punkte m ergibt sich jetzt in Abb. 167e durch Zerlegung der Mittelkraft od die Längskraft kd und die Querkraft ok, die wiederum als Strecke mm' aufgetragen ist.

In Abb. 167g sind unter Berücksichtigung der der Deutlichkeit wegen für die einzelnen Kräftepläne verschieden gewählten Kräftemaßstäbe die Querkräfte vom Winddruck ebenfalls eingetragen, woraus sich die der ungünstigsten Lastanordnung entsprechenden Größtwerte ergeben.

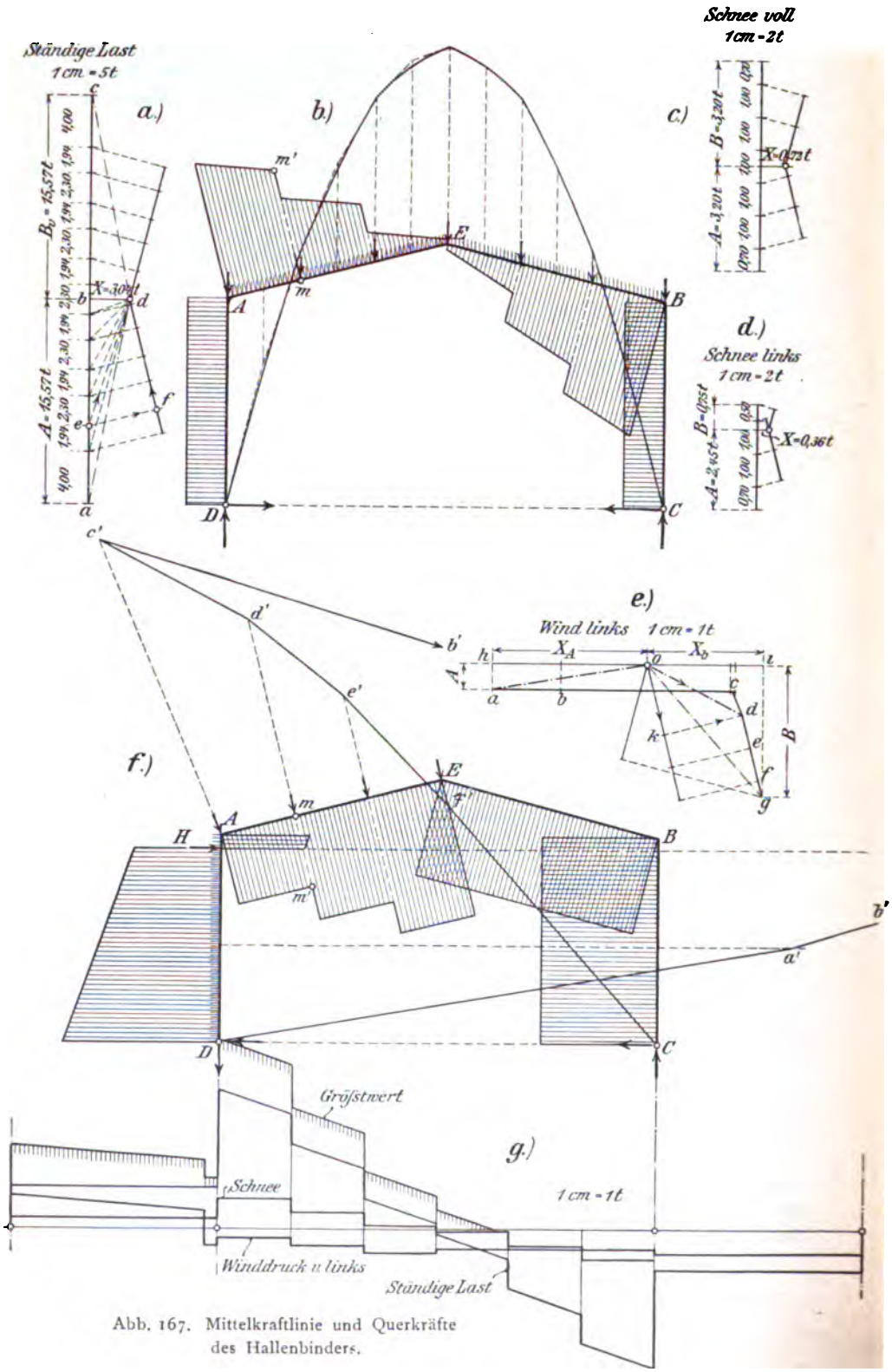


Abb. 167. Mittelkraftlinie und Querkräfte des Hallenbinders.

III. Beispiel. Vierseitiger Rahmen für eine Eisenbahnunterführung.

Unter den Gleisen des Hauptbahnhofes Leipzig ist ein Eilguttunnel durchgeführt, der zum Teil auf wenig tragfähigem Boden ruht. Mit Rücksicht auf etwaige Bodensenkungen wurde ein in sich geschlossener vierseitiger Rahmen von der Firma Dyckerhoff u. Widmann A.-G., Dresden, entworfen und unter der Leitung des Brückenbaubureaus der Kgl. Sächs. Staatseisenbahnen ausgeführt (Abb. 168).

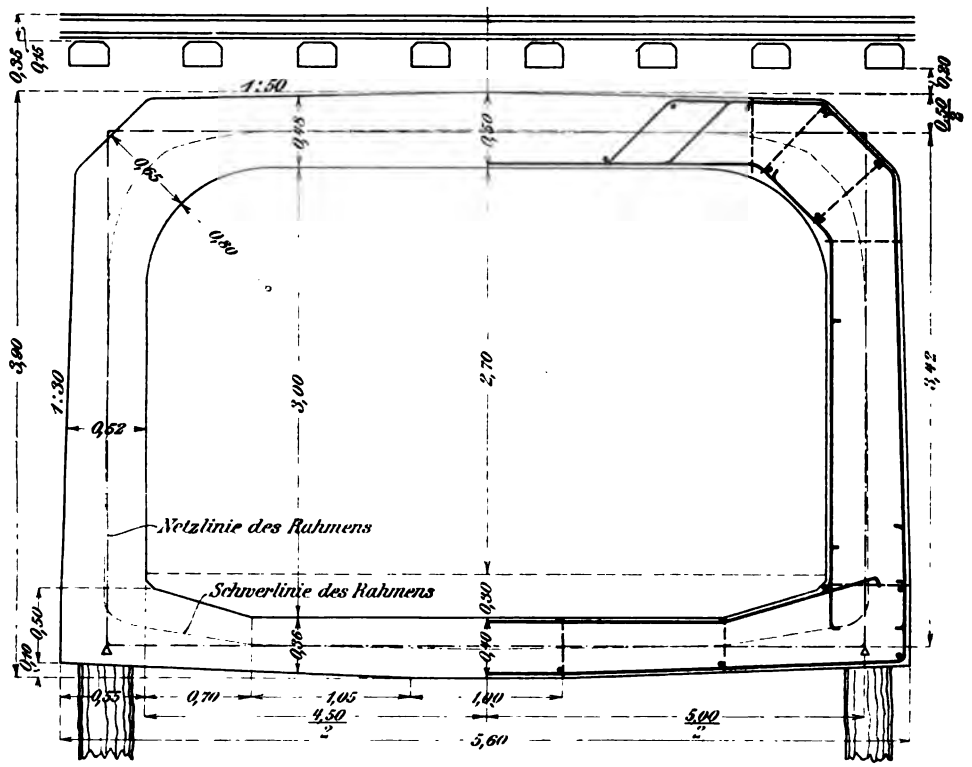


Abb. 168. Querschnitt der Eisenbahnunterführung.

Wie aus Abb. 168 ersichtlich ist, sind Decke, Boden und Wände des Tunnels zur Verminderung der Schalkosten als einfache Eisenbetonplatten ohne Rippen ausgebildet. Auf der linken Seite ist der reine Betonquerschnitt mit seiner Schwerlinie, auf der rechten Seite die Anordnung der Eiseneinlagen dargestellt.

Zur möglichsten Vermeidung von Bodensenkungen, durch die die Höhenlage der Fördergleise im Tunnel beeinträchtigt würde, sind unter den beiden Seitenwänden Straußpfähle angeordnet.

Da jedoch voraussichtlich in den Strecken tragfähigen Bodens ein Teil der Lasten unmittelbar durch die Bodenplatte abgeleitet wird, so soll im folgenden die Berechnung für die beiden Grenzfälle durchgeführt werden, und zwar wird als 1. Fall die angenähert statisch bestimmte

Stützung des Rahmens nach Abb. 169a auf den Pfählen angenommen, sodann als 2. Fall die Lagerung desselben unmittelbar auf dem Erdreich unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Lasten auf die Bodenfläche nach Abb. 169b.

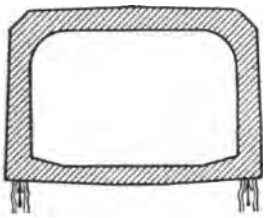


Abb. 169a.

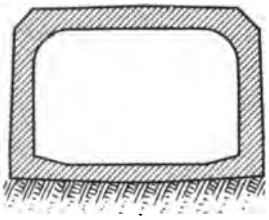


Abb. 169b.

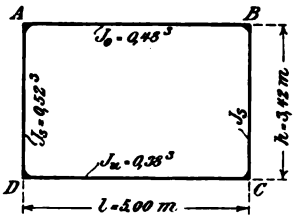


Abb. 170.

1. Die Rahmenabmessungen und Bemessungsgrößen ergeben sich nach Abb. 170 zu $l = 5{,}00$ m; $h = 3{,}42$ m;

$$J_o = \frac{0{,}48^3\, b}{12}; \qquad J_u = \frac{0{,}38^3\, b}{12}; \qquad J_s = \frac{0{,}52^3\, b}{12};$$

$$\nu = \frac{h J_o}{l J_s} = \frac{3{,}42}{5{,}00} \cdot \frac{0{,}48^3}{0{,}52^3} = 0{,}54; \qquad \omega = \frac{J_o}{J_u} = \frac{0{,}48^3}{0{,}38^3} = 2{,}02$$

und damit die dem vierseitigen Rahmen eigentümlichen Festwerte (S. 123)

$$\alpha = \nu(\nu + 2) + \omega(2\nu + 3) = 0{,}54 \cdot 2{,}54 + 2{,}02 \cdot 4{,}08 = 9{,}60$$
$$\beta = 6\nu + 1 + \omega = 6 \cdot 0{,}54 + 1 + 2{,}02 = 6{,}26.$$

2. Die Belastungen des Rahmens.

a) Ständige Last für 1,0 m Tunnellänge:

α) Raumgewichte:

Eisenbeton	2400 kg/cbm
Magerbeton	2200 „
Beschotterung	1800 „
Erdgewicht	1800 „
Dichtung	20 kg/qm.

β) Deckenplatte:

Eigengewicht	$0{,}5 \cdot 2400 = 1200$ kg/m
Dichtung	20 „
Schotterbett einschl. Schwellen	$0{,}35 \cdot 1800 = 630$ „
zusammen	$g_o = 1850$ kg/m $= 1{,}85$ t/m.

γ) Seitenwände: Eigengewicht

$0{,}52\,(3{,}80 \cdot 2400 + 20 + 630) =$ rd. 5100 kg/m $= 5{,}10$ t/m.

Erddruck:[1])

$$s = 0{,}65\, h;$$

demnach in Höhe der oberen Rahmenecke für $h' = 0{,}35 + \frac{0{,}50}{2} = 0{,}60$ m

$$s_o = 0{,}65 \cdot 0{,}60 = 0{,}39 \text{ t/m},$$

in Höhe der unteren Rahmenecke für $h' = 0{,}60 + 3{,}42 = 4{,}02$ m

$$s_u = 0{,}65 \cdot 4{,}02 = 2{,}61 \text{ t/m}.$$

[1]) Nach Möllers Erddrucktabellen S. 5 für ein Erdgewicht von $\gamma = 1800$ kg/cbm und einen Reibungswinkel $\varrho = 27°$.

δ) Bodenplatte:

Eigengewicht . . . . . 0,38 · 2400 = 910 kg/m
Ausgleichschicht aus Magerbeton 0,30 · 2200 = 660 „
zusammen $g_u = 1570$ kg/m = 1,57 t/m.

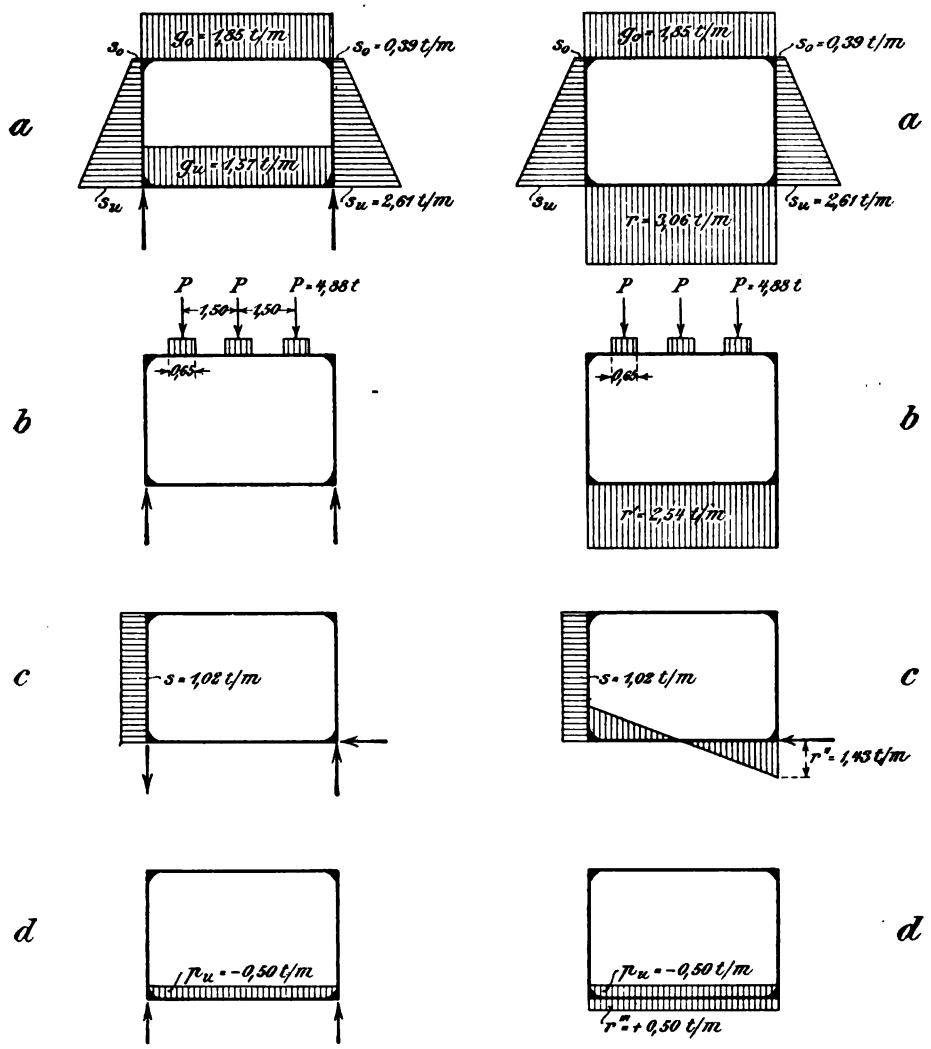


Abb. 171.

Abb. 172.

Belastungsarten
bei Stützung auf den Pfählen (Fall I). bei Stützung auf dem Erdreich (Fall II).

ε) Bodendruck, unter der Voraussetzung, daß die ganze Rahmenlast von der Sohle aufgenommen wird (2. Fall), ebenfalls bezogen auf 1,0 m Tunnellänge:

$$q = \frac{1}{5{,}60}(1{,}85 \cdot 4{,}50 + 2 \cdot 5{,}10 + 1{,}57 \cdot 4{,}50) = \frac{25{,}90}{5{,}60} = 4{,}63 \text{ t/m}.$$

Somit ist die von unten her auf die Rahmensohle wirkende Belastung:

$$r = q - g_u = 4{,}63 - 1{,}57 = 3{,}06 \text{ t/m}.$$

Diese so ermittelten Belastungen sind für die beiden betrachteten Fälle in Abb. 171a u. 172a zusammengestellt.

b) Verkehrslast.

Für das über den Tunnel hinweggeführte Vollspurgleis ist nach der Eisenbahn-Bau- und Betriebsordnung für den vorliegenden Fall ein Lastenzug anzunehmen, der aus 3 Achslasten zu je 19 t in Abständen von 1,5 m besteht.

α) Deckenplatte. Die Lastverteilung[1]) durch die Schwellen wird auf eine Breite senkrecht zur Tunnelachse gemessen

$$v' = t + 2\,s = 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}20 = 0{,}65 \text{ m}$$

und auf eine Tunnellänge

$$v'' = t + 2\,s + 2\,d = 2{,}50 + 2 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 0{,}50 = 3{,}90 \text{ m}$$

angenommen, so daß die Achslasten für 1 m Tunnellänge mit

$$P = \frac{19{,}0}{3{,}90} = 4{,}88 \text{ t}$$

zu rechnen sind. Die Berücksichtigung der Stöße erfolgt bei der Spannungsermittlung in der Deckenplatte durch einen Zuschlag von 50 vH. zu den Wirkungen der Verkehrslast.

β) Seitenwände. Für die außerhalb des Tunnelgrundrisses stehenden Achslasten wird angenommen, daß sie in der Richtung der Tunnelachse auf eine Breite gleich dem Gleisabstand = 4,0 m, in der Richtung der Gleisachse vollkommen gleichförmig verteilt werden. Bei einem Reibungswinkel des Erdreichs $\varphi = 27^0$ wirkt auf die Seitenwände (vergl. Abb. 168) eine Gleislänge von $\left(3{,}42 + \frac{0{,}50}{2} + 0{,}20\right)$ cotg 27^0 = rd. 7,6 m ein, auf der 5 Achsen von je 1,5 m Abstand Platz finden können. Da diese nach der Eisenbahn-Bau- und Betriebsordnung mit je 17 t Gewicht anzunehmen sind, so ergibt sich der Druck des Lastenzuges auf das Erdreich zu $\frac{17{,}0}{4{,}0 \cdot 1{,}5} = 2{,}84$ t/qm. Rechnet man diese Last in Erdgewicht um, so erhält man als Ueberschüttungshöhe $h = \frac{2{,}84}{1{,}80} = 1{,}57$ m und hierfür den Erddruck (Abb. 171c) $s = 0{,}65 \cdot 1{,}57 = 1{,}02$ t/m.

γ) Bodenplatte. Verkehrslast im Inneren des Tunnels
$= 500$ kg/qm $= 0{,}50$ t/m. (Abb. 171d.)

Diese Belastung hebt sich im zweiten Falle (Abb. 172d) gegen den gleichgroßen Gegendruck des Bodens auf. Dafür tritt aber in diesem 2. Falle (ohne Pfahlstützung) der Gegendruck hinzu, welcher infolge der Belastung der übrigen Rahmenteile von der Bodenfläche ausgeübt wird.

[1]) Vergl. Handbuch für Eisenbetonbau, 2. Aufl., Bd. VI, S. 136.

Bei Belastung der Decke mit 3 Achsen von 19 t, die auf eine Breite von 4,0 m wirken, ist nach Abb. 172b der Bodendruck

$$r' = \frac{3 \cdot 19{,}0}{4{,}0 \cdot 5{,}60} = 2{,}54 \text{ t/qm}.$$

Bei Belastung einer Seitenwand allein wird angenommen, daß die wagerechte Schubkraft von der Sohlfläche durch Reibung aufgenommen wird, das verbleibende Drehmoment aber eine Belastung des Bodens nach Abb. 172c erzeugt. Die Größe des Bodendruckes r'' berechnet sich dann, da das Drehmoment in bezug auf den Punkt D

$$M_K = s\,h \cdot \frac{h}{2} = \frac{r'' l}{4} \cdot \frac{2}{3} l$$

ist, (vergl. S. 127) zu

$$r'' = 3\,s \cdot \frac{h^2}{l^2} = 3 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{3{,}42^2}{5{,}00^2} = 1{,}43 \text{ tm}.$$

c) Die hiernach möglichen Belastungsfälle sind in Abb. 171 u. 172 dargestellt.

8. Die Berechnung der Eckmomente

ergibt sich nunmehr wie folgt:

a) Von der ständigen Last (Abb. 171a u. 172a).

α) Für die Deckenplatte mit der gleichmäßig verteilten Belastung $g = 1{,}85$ t/m ist

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{g l^2}{8} = \frac{1{,}85 \cdot 5{,}0^2}{8} = 5{,}78 \text{ tm}$$

und nach Gleichung 33c) (S. 123).

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2\nu + 3\omega}{\alpha} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 0{,}54 + 3 \cdot 2{,}02}{9{,}60} = -0{,}496$$

$$\mu_C = \mu_D = +\frac{2}{3} \cdot \frac{\nu}{\alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{0{,}54}{9{,}60} = +0{,}038.$$

Somit wird, da $M = \mu\,\mathfrak{M}$ ist,

$$M_A = M_B = -2{,}86 \text{ tm}; \quad M_C = M_D = +0{,}22 \text{ tm}.$$

β) Seitenwände mit der von links und rechts wirkenden gleichförmig verteilten Last $s_o = 0{,}39$ t/m.

$$\mathfrak{M}_K = -\frac{0{,}39 \cdot 3{,}42^2}{2} = -2{,}28 \text{ tm}.$$

Nach Gleichung 34d) (S. 123) ist

$$\mu_A = \mu_B = \frac{\nu}{6} \cdot \frac{\nu + 3\omega}{\alpha} = \frac{0{,}54}{6} \cdot \frac{0{,}54 + 6{,}06}{9{,}60} = 0{,}062$$

$$\mu_C = \mu_D = \frac{\nu}{6} \cdot \frac{\nu + 3}{\alpha} = \frac{0{,}54}{6} \cdot \frac{0{,}54 + 3}{9{,}60} = 0{,}033$$

$$M_A = M_B = -0{,}14 \text{ tm}; \quad M_C = M_D = -0{,}08 \text{ tm}.$$

γ) Seitenwände mit der ebenfalls beiderseits wirkenden dreieckförmig verteilten Last $s_u = 2{,}61 - 0{,}39 = 2{,}22$ t/m

$$\mathfrak{M}_K = -\frac{2{,}22 \cdot 3{,}42^2}{6} = -4{,}33 \text{ tm}.$$

Nach Gleichung 34e) (S. 123) ist

$$\mu_A = \mu_B = \frac{\nu}{10} \cdot \frac{2\nu + 7\omega}{\alpha} = \frac{0{,}54}{10} \cdot \frac{1{,}08 + 14{,}14}{9{,}60} = 0{,}086$$

$$\mu_C = \mu_D = \frac{\nu}{10} \cdot \frac{3\nu + 8}{\alpha} = \frac{0{,}54}{10} \cdot \frac{1{,}62 + 8}{9{,}60} = 0{,}054$$

$M_A = M_B = -0{,}37$ tm; $M_C = M_D = -0{,}23$ tm.

δ) Bodenplatte mit Pfahlstützung (Fall 1) $g_u = -1{,}57$ t/m

$$\mathfrak{M}_{max} = -\frac{1{,}57 \cdot 5{,}00^2}{8} = -4{,}90 \text{ tm.}$$

Nach Gleichung 35a) (S. 123) ist

$$\mu_A = \mu_B = +\frac{2}{3}\,\omega\,\frac{\nu}{\alpha} = +\frac{2}{3} \cdot 2{,}02 \cdot \frac{0{,}54}{9{,}60} = +0{,}076$$

$$\mu_C = \mu_D = -\frac{2}{3}\,\omega\,\frac{2\nu + 3}{\alpha} = -\frac{2}{3} \cdot 2{,}02 \cdot \frac{4{,}08}{9{,}60} = -0{,}572$$

$M_A = M_B = -0{,}37$ tm; $M_C = M_D = +2{,}80$ tm.

Bodenplatte ohne Pfahlstützung (Fall 2) $r = +3{,}06$ t/m

$$\mathfrak{M} = +\frac{3{,}06 \cdot 5{,}00^2}{8} = +9{,}56 \text{ tm.}$$

Nach Gleichung 35a) ergeben sich dieselben μ-Werte wie vorher und somit

$$M_A = M_B = +0{,}73 \text{ tm}; \qquad M_C = M_D = -5{,}46 \text{ tm.}$$

Insgesamt wird daher infolge der ständigen Last in beiden Stützungsfällen

$$M_A = M_B = -2{,}86 - 0{,}14 - 0{,}37 \begin{cases} -0{,}37 = -3{,}74 \text{ tm} \\ +0{,}73 = -2{,}64 \text{ tm} \end{cases}$$

$$M_C = M_D = +0{,}22 - 0{,}08 - 0{,}23 \begin{cases} +2{,}30 = +2{,}71 \text{ tm} \\ -5{,}46 = -5{,}55 \text{ tm.} \end{cases}$$

b) Von der Verkehrslast (Abb. 171 u. 172b bis d).

α) Deckenplatte. Die Berechnung ist getrennt auszuführen, und zwar:

1. Für die Last in der Deckenmitte ist nach Gleichung 33d (S. 123)

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{Pl}{8}(2 - \varrho) = 4{,}88 \cdot \frac{5{,}0}{8}(2 - 0{,}13) = 5{,}70 \text{ tm,}$$

da $v' = \varrho l = 0{,}65$ m, also $\varrho = \frac{v'}{l} = \frac{0{,}65}{5{,}00} = 0{,}13$ ist.

Somit ergibt sich nach Gleichung 33d) (S. 123)

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{2\nu + 3\omega}{3\alpha} \cdot \frac{3 - \varrho^2}{2 - \varrho} = -\frac{1{,}08 + 6{,}06}{3 \cdot 9{,}60} \cdot \frac{2{,}983}{1{,}87} = -0{,}372$$

$$\mu_C = \mu_D = +\frac{\nu}{3\alpha} \cdot \frac{3 - \varrho^2}{2 - \varrho} = +\frac{0{,}54}{3 \cdot 9{,}60} \cdot \frac{2{,}983}{1{,}87} = +0{,}030$$

$M_A = M_B = -2{,}12$ tm; $M_C = M_D = +0{,}17$ tm.

2. Für die zwei seitlichen Lasten. Da

$$\xi = \frac{5{,}0 - 2 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 5{,}00} = 0{,}20 \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{max} = 4{,}88 \cdot 5{,}0 \cdot 0{,}2 = 4{,}88 \text{ tm}$$

ist, erhält man nach Gleichung 33e) (S. 123)

$$\mu_A = \mu_B = -\frac{2\nu + 3\omega}{\alpha}\left(1 - \xi - \frac{\varrho^2}{12\,\xi}\right)$$

$$= -\frac{1{,}08 + 6{,}06}{9{,}60}\left(0{,}8 - \frac{0{,}13^2}{2{,}4}\right) = -0{,}590$$

$$\mu_C = \mu_D = +\frac{\nu}{\alpha}\left(1 - \xi - \frac{\varrho^2}{12\,\xi}\right) = +\frac{0{,}54}{9{,}60}(0{,}793) = +0.045$$

$$M_A = M_B = -2.88 \text{ tm}; \quad M_C = M_D = +0{,}22 \text{ tm}.$$

Für die zugleich wirkenden drei Lasten der Abb. 172b ergibt sich somit im 1. Fall

$$M_A = M_B = -2{,}12 - 2{,}88 = -5{,}00 \text{ tm}$$

und

$$M_C = M_D = +0{,}17 + 0{,}22 = +0{,}39 \text{ tm}.$$

Wäre diese Belastung $3P = 11{,}64$ t vollkommen gleichmäßig über die ganze Decke verteilt, so würden sich ergeben: $\mathfrak{M}_{max} = 10{,}58$ tm und bei den unter a) α) berechneten μ-Werten als Eckmomente

$$M_A = M_B = 10{,}58 \cdot (-0{,}496) = -5{,}25 \text{ tm}$$

$$M_C = M_D = 10{,}58 \cdot (+0{,}038) = +0{,}40 \text{ tm}.$$

Für den 2. Fall (unmittelbare Stützung auf der Bodenplatte) tritt hierzu nach Abb. 172b die Belastung des unteren Rahmenstabes mit $r' = 2{,}54$ t/m, also wird entsprechend dem Fall a) δ)

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{2{,}54 \cdot 5{,}0^2}{8} = 7{,}94 \text{ tm}$$

$$M_A = M_B = 7{,}94 \cdot (+0{,}076) = +0{,}60 \text{ tm}$$

$$M_C = M_D = 7{,}94 \cdot (-0{,}572) = -4{,}54 \text{ tm},$$

insgesamt also

$$M_A = M_B = -5{,}25 + 0{,}60 = -4{,}65 \text{ tm}$$

$$M_C = M_D = +0{,}40 - 4{,}54 = -4.14 \text{ tm}.$$

β) Seitenwände bei einseitiger Belastung mit $s = 1{,}02$ t/m (Abb. 171c). Hierfür wird

$$\mathfrak{M}_K = -1{,}02 \cdot \frac{3{,}42^2}{2} = -5{,}97 \text{ tm}$$

und nach Gleichung 34b) (S. 123)

$$\mu_A = \frac{\nu}{12} \cdot \frac{\nu + 3\omega}{\alpha} - \frac{2\nu + \omega}{2\beta} = \frac{0{,}54}{12} \cdot \frac{6{,}60}{9{,}60} - \frac{3{,}10}{2 \cdot 6{,}26}$$

$$= 0{,}031 - 0{,}248 = -0{,}217.$$

$$\mu_B = +0{,}031 + 0{,}248 = +0{,}279$$

$$\mu_D = +\frac{\nu}{12}\cdot\frac{7\nu+15}{\alpha} + \frac{\omega}{2}\cdot\frac{2\nu+3}{\alpha} - \frac{2\nu+\omega}{2\beta}$$

$$= \frac{0{,}54}{12}\cdot\frac{18{,}78}{9{,}60} + \frac{2{,}02}{2}\cdot\frac{4{,}08}{9{,}60} - \frac{3{,}10}{12{,}52}$$

$$= +0{,}088 + 0{,}429 - 0{,}248 = +0{,}269$$

$$\mu_C = -\frac{\nu}{12}\cdot\frac{5\nu+9}{\alpha} - \frac{\omega}{2}\cdot\frac{2\nu+3}{\alpha} + \frac{2\nu+\omega}{2\beta}$$

$$= -0{,}055 - 0{,}429 + 0{,}248 = -0{,}236.$$

Somit ist

$M_A = +1{,}30$ tm; $M_B = -1{,}66$ tm; $M_C = +1{,}41$ tm;
$M_D = -1{,}60$ tm.

Für den 2. Fall (unmittelbare Stützung auf der Bodenplatte) tritt hierzu die nach Abb. 172c verteilt angenommene Belastung der Bodenplatte für die sich nach Gleichung 35b) (S. 123)

$\mu = \frac{\omega}{10\beta} = \frac{2{,}02}{10\cdot 6{,}26} = 0{,}032$ ergibt, also mit $\mathfrak{M}_K = -5{,}97$ tm

$+M_A = -M_B = +M_C = -M_D = 0{,}19$ tm.

In diesem Falle wird daher

$M_A = +1{,}49$ tm; $M_B = -1{,}85$ tm; $M_C = +1{,}60$ tm;
$M_D = -1{,}79$ tm.

γ) Bodenplatte. Für den 1. Fall (Stützung durch Pfähle) (Abb. 171d) ist

$$p_u = -0{,}50 \text{ t/m}; \qquad \mathfrak{M}_{max} = -0{,}50\cdot\frac{5{,}0^2}{8} = -1{,}56 \text{ tm}$$

und mit den unter α) δ) berechneten Werten für μ

$$M_A = M_B = -1{,}56\cdot 0{,}076 = -0{,}12 \text{ tm}$$
$$M_C = M_D = -1{,}56\cdot(-0{,}572) = +0{,}89 \text{ tm}.$$

Für den 2. Fall (unmittelbare Stützung der Bodenplatte) hebt sich die Belastung mit dem gleich großen Bodendruck r''' auf, so daß der Rahmen aus dieser Belastung keine Beanspruchungen erhält.

4. Die Auftragung der Biegungsmomente

erfolgt ähnlich, wie im Beispiel I angegeben, und bedarf an sich keiner näheren Erläuterung. Zu der Darstellung der Biegungsmomente in Abb. 173 ist nur zu bemerken, daß des bequemeren Vergleiches wegen auf der linken Seite die Biegungsmomente dargestellt sind für den Fall einer Stützung des Rahmens in den beiden Eckpunkten D und C (1. Fall), wogegen die Biegungsmomente auf der rechten Seite für den Fall gelten, daß die Rahmenlasten nur von der Bodenplatte nach dem Erdreich übertragen werden (2. Fall). In Abb. 173a sind die Momentenlinien mit Hilfe der Schlußlinien und der nicht dargestellten Endtangenten für die ständige Last (Abb. 171a u. 172a), in Abb. 173b diejenigen für die Verkehrslast der Deckenplatte AB (Abb. 171b u. 172b) dargestellt, wobei die Momentenlinien für die ortsveränderlichen Einzellasten der Einfachheit halber als

reine Parabeln aufgetragen sind. Abb. 173c zeigt die Biegungsmomente für unmittelbare Verkehrsbelastung eines Pfostens, z. B. AD (Abb. 171c u. 172c), und für die gleiche Belastung des gegenüberliegenden Pfostens, also BC. In Abb. 173d sind die Biegungsmomente für die Belastung der Bodenplatte (Abb. 171d u. 172d) dargestellt.

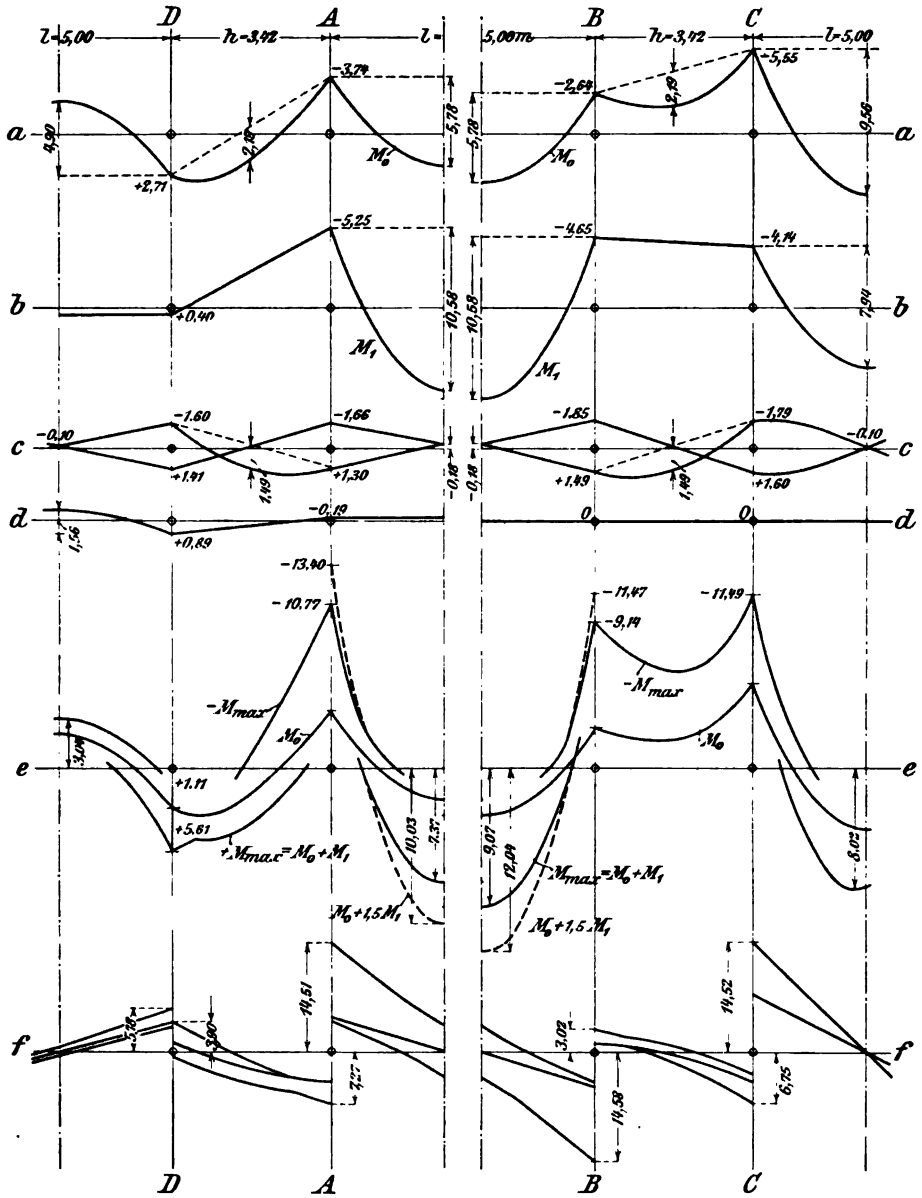


Abb. 173. Biegungsmomente und Querkräfte des vierseitigen Rahmens bei Stützung auf den Pfählen (Fall I). bei Stützung auf dem Erdreich (Fall II).

Endlich sind in Abb. 173e nochmals die Momentenlinien für die ständige Last aufgetragen und darüber durch Ansetzen der Momente von der Verkehrsbelastung die Umhüllenden der größten Biegungsmomente gezeichnet worden. Die gestrichelten Linien im Felde AB sind die umhüllenden Momentenlinien, die für eine um 50 vH. vergrößerte, auf die Deckenplatte wirkende Verkehrslast gelten und der Ermittlung der Beanspruchungen zugrunde zu legen sind.

Sämtliche in Abb. 173 eingeschriebenen Zahlen sind der vorhergehenden Berechnung entnommen, mit Ausnahme der Pfeilhöhen für die Momentenlinien der Pfostenbelastungen. Die Auftragung der Momentenlinien für die dreieck- oder trapezförmige Belastung der Pfosten und der Bodenplatte ist nach der auf S. 126 gegebenen Anleitung erfolgt. Die Pfeilhöhe der Momentenlinie in Pfostenmitte ist für die ständige Last (Abb. 171a u. 172a)

$$\mathfrak{M}_m = (s_o + s_u) \cdot \frac{l^2}{16} = (0{,}39 + 2{,}61) \cdot \frac{3{,}42^2}{16} = 2{,}19 \text{ tm},$$

für die gleichmäßig verteilte Verkehrsbelastung (Abb. 171c u. 172c)

$$\mathfrak{M}_m = \frac{1{,}02 \cdot 3{,}42^2}{8} = 1{,}49 \text{ tm}.$$

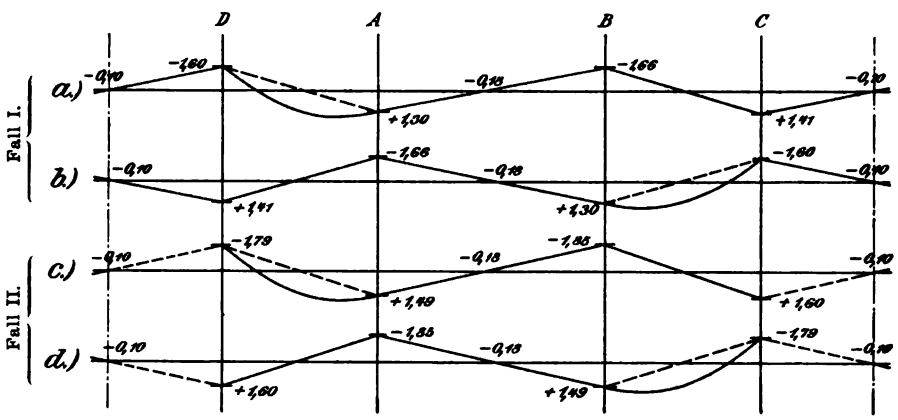


Abb. 174. Biegungsmomente für die Belastungsfälle der Pfosten.

Zur besseren Veranschaulichung des Verlaufes der Momentenlinien für die einzelnen Belastungsfälle der Pfosten sind dieselben in Abb. 174a bis d getrennt jeweils für den ganzen Rahmen aufgezeichnet worden. In Abb. 173c sind dieselben Linien übereinandergelegt, da sie für die Belastung des linken oder rechten Pfostens spiegelbildlich gleich sind.

5. Die Ermittelung der Querkräfte

erfolgt am einfachsten dadurch, daß die Stützendrücke rechnerisch bestimmt und so aufgetragen werden, wie im folgenden erörtert wird. Die Querkräfte der zwischenliegenden Punkte ergeben sich dann in bekannter Weise durch Einzeichnung der Querkraftlinien für jede Belastungsart. Sie entsprechen bei symmetrischer Belastung oder bei

gleicher Größe der Einspannmomente an beiden Stabenden vollkommen denen eines einfachen Trägers. Bei ungleichen Eckmomenten

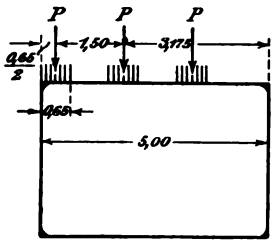


Abb. 175.

dagegen sind den für einfache Träger geltenden Werten die Querkräfte

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{l}$$

zuzusetzen.

Für den vorliegenden Rahmen ergeben sich daher unter Benutzung der in Abb. 173a bis d eingeschriebenen Momentenzahlen die Stützkräfte und daraus die Querkraftlinien, wie folgt.

a) Deckenplatte AB bei dem durch Pfähle gestützten Rahmen (1. Fall). Für die ständige Last der Abb. 171a ist

$$Q_A = -Q_B = \frac{gl}{2}$$

$$= \frac{1{,}85 \cdot 5{,}00}{2} = 4{,}62 \text{ t}.$$

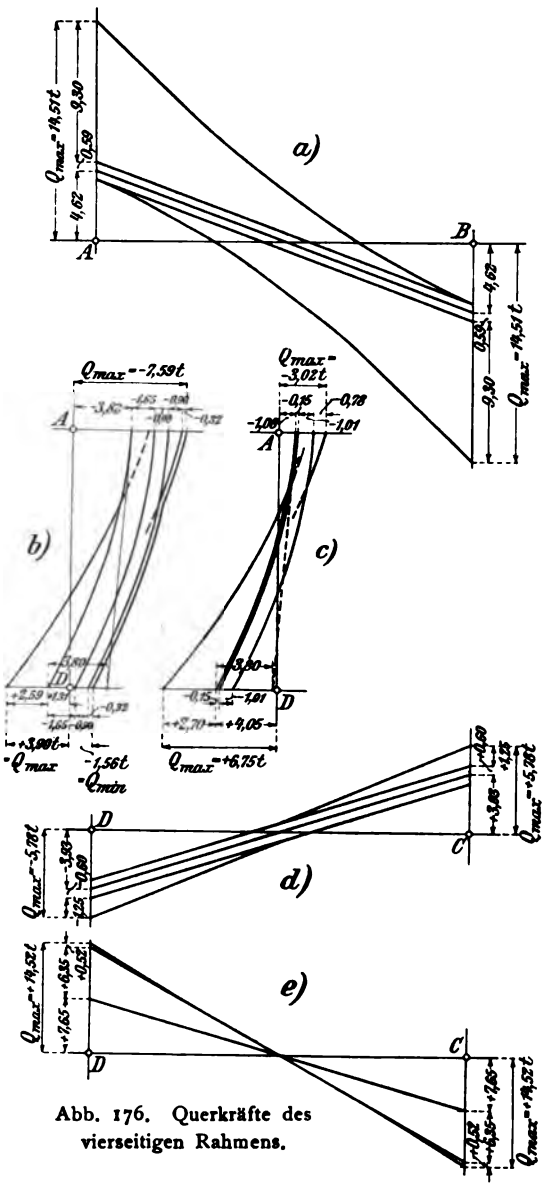


Abb. 176. Querkräfte des vierseitigen Rahmens.

Für die unmittelbare Verkehrslast der Abb. 171b ist dann, wenn die erste Achse des Belastungszuges unmittelbar über dem Pfosten A bezw. dem Pfosten B steht (Abb. 175)

$$Q_A = -Q_B = 3 \cdot 4{,}88 \cdot \frac{3{,}175}{5{,}00} \quad . \quad . \quad . \quad = 9{,}30 \text{ t}.$$

Für die Verkehrslast des linken Pfosten AD nach Abb. 171c sind die Querkräfte aus den Eckmomenten der Abb. 173c oder 174a und b zu ermitteln. Da hier nach $M_A = +1{,}30$ tm, $M_B = -1{,}66$ tm ist, so wird

$$Q_A = Q_B = \frac{M_B - M_A}{l} = + \frac{-1{,}66 - 1{,}30}{5{,}00} = -0{,}59 \text{ t.}$$

Für die Belastung des rechten Pfostens gilt der gleiche Wert mit entgegengesetzten Vorzeichen. Somit ergibt sich

$$\max Q_A = -\max Q_B = 4{,}62 + 9{,}30 + 0{,}59 = 14{,}51 \text{ t.}$$

Diese lotrecht wirkenden Querkräfte an den Stützen AB stellen gleichzeitig die Längskräfte in den Pfosten dar (vergl. S. 128). Der Verlauf der Querkräfte zwischen den beiden Stützen A und B ist für die verschiedenen Belastungen aus den zugehörigen Momentenlinien abzuleiten. Für die ständige, gleichmäßig verteilte Belastung (Abb. 171a) ist die Querkraftlinie eine Gerade, die die beiden Stützenordinaten $Q_A = 4{,}62$ t und $Q_B = -4{,}62$ t in Abb. 176a verbindet. Für die Belastung eines Pfostens (Abb. 171c) ist die Momentenlinie innerhalb der Strecke AB eine Gerade (Abb. 174), demnach die Querkraft für alle Schnitte gleich groß, so daß die Querkraftlinie als eine Parallele zu der der ständigen Last aufgetragen ist (Abb. 176a). Zur Bestimmung der Querkräfte aus der wandernden Verkehrslast (Abb. 171b) zeichnet man in bekannter Weise ein A-Polygon, das hier in Abb. 176a an die bereits vorher erhaltenen Querkraftlinien angesetzt wird.

Für den 2. Fall (unmittelbare Stützung des Rahmens) ergeben sich die Querkräfte von der Belastung eines Pfostens AD (nach Abb. 172c) aus der Momentenlinie der Abb. 174c und d zu

$$+Q_A = +Q_B = \frac{+1{,}49 - (-1{,}85)}{5{,}00} \quad \ldots\ldots = 0{,}67 \text{ t,}$$

gegenüber 0,59 t im ersten Falle. Alle übrigen Querkräfte sind gleich den vorberechneten des 1. Falles. Die Querkräfte in der Deckenplatte werden demnach von der Stützungsart des Rahmens kaum nennenswert beeinflußt.

b) Pfosten bei dem durch Pfähle gestützten Rahmen (1. Fall).

Die Querkräfte an den Eckpunkten A und D ergeben sich von der ständigen Belastung nach Abb. 171a u. 173a (links)

$$Q_D = \frac{s_o h}{2} + \frac{(s_u - s_o) \cdot h}{3} + \frac{M_A - M_D}{h}$$

$$= \left(\frac{0{,}39}{2} + \frac{2{,}22}{3} \right) \cdot 3{,}42 + \frac{-3{,}74 - 2{,}71}{3{,}42} \quad \ldots = +1{,}31 \text{ t,}$$

$$Q_A = Q_D - \frac{s_u + s_o}{2} h = 1{,}31 - \frac{0{,}39 + 2{,}61}{2} \cdot 3{,}42 \ldots = -3{,}82 \text{ t,}$$

von der Verkehrslast des Balkens nach Abb. 171b u. 173b (links)

$$Q_D = +Q_A = \frac{-5{,}25 - 0{,}40}{3{,}42} \quad \ldots\ldots\ldots = -1{,}65 \text{ t,}$$

von der Verkehrslast des gegenüberliegenden Pfostens nach Abb. 174a

$$Q_D = +Q_A = \frac{(-1{,}66) - 1{,}41}{3{,}42} \quad \ldots\ldots\ldots = -0{,}90 \text{ t},$$

von der eigenen Verkehrsbelastung nach Abb. 171c u. 174a)

$$Q_D = +\frac{1{,}02 \cdot 3{,}42}{2} + \frac{1{,}30 - (-1{,}60)}{3{,}42} \quad \ldots\ldots = +2{,}59 \text{ t},$$

$$Q_A = 2{,}59 - 1{,}02 \cdot 3{,}42 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots = -0{,}90 \text{ t},$$

von der Verkehrslast auf die Bodenplatte nach Abb. 173d

$$Q_D = Q_A = \frac{-0{,}19 - 0{,}89}{3{,}42} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots = -0{,}32 \text{ t},$$

zusammen daher im ungünstigsten Falle

$$\max Q_D = +1{,}31 + 2{,}59 \quad \ldots\ldots\ldots = +3{,}90 \text{ t},$$
$$\max Q_A = -3{,}82 - 1{,}65 - 0{,}90 - 0{,}90 - 0{,}32 = -7{,}59 \text{ t}.$$

Der Verlauf der Querkräfte zwischen den Ecken A und D ist wieder aus den zugehörigen Momentenlinien zu entnehmen (Abb. 173 links).

Die Querkraftlinie (Abb. 176b) der ständigen Last ist eine Parabel, deren Scheiteltangente (bei A) am Stützenlot in D, vergl. auch Anleitung S. 126 (Abb. 143c), die gesamte Dreieckslast, also die Strecke

$$Q' = (s_u - s_o)\frac{h}{2} = (2{,}61 - 0{,}39) \cdot \frac{3{,}42}{2} \quad \ldots\ldots = 3{,}80 \text{ t}$$

anschneidet. Die Querkraftflächen von der Verkehrslast des Balkens und des gegenüberliegenden Pfostens sind Rechtecke, weil in Abb. 173b u. 174b die zugehörigen Momentenlinien Gerade sind. Die Querkraftfläche von der eigenen, gleichförmig verteilten Verkehrsbelastung (Abb. 171c) ist ein verschränktes Trapez.

Diese Flächen werden in der aus Abb. 176b ersichtlichen Weise an die Querkraftfläche der ständigen Last angesetzt.

Wird der Rahmen im 2. Falle nur durch die Bodenplatte gestützt, so ergibt sich in gleicher Weise

von der ständigen Last nach Abb. 172a u. 173a rechts

$$Q_D = \left(\frac{0{,}39}{2} + \frac{2{,}22}{3}\right) \cdot 3{,}42 + \frac{(-2{,}64) - (-5{,}55)}{3{,}42} = +4{,}05 \text{ t},$$

$$Q_A = 4{,}05 - \frac{0{,}39 + 2{,}61}{2} \cdot 3{,}42 \quad \ldots\ldots\ldots = -1{,}08 \text{ t},$$

von der Verkehrslast des Balkens nach Abb. 173b rechts

$$Q_D = Q_A = \frac{(-4{,}65) - (-4{,}14)}{3{,}42} \quad \ldots\ldots\ldots = -0{,}15 \text{ t},$$

von der des gegenüberliegenden Pfostens nach Abb. 174d

$$Q_D = Q_A = \frac{(-1{,}85) - 1{,}60}{3{,}42} \quad \ldots\ldots\ldots = -1{,}01 \text{ t},$$

von der eigenen Verkehrslast nach Abb. 172c u. 174c

$$Q_D = +\frac{1{,}02 \cdot 3{,}42}{2} + \frac{1{,}49 - (-1{,}79)}{3{,}42} \quad . \; . \; . \; . \; . \; = +2{,}70 \text{ t}$$

$$Q_A = 2{,}72 - 1{,}02 \cdot 3{,}42 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; = -0{,}78 \text{ t},$$

von der Verkehrslast der Bodenplatte $Q_D = Q_A \; . \; . \; . \; = \; 0$

zusammen daher

$$\max Q_D = +4{,}05 + 2{,}70 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; = +6{,}75 \text{ t},$$

$$\max Q_A = -1{,}08 - 0{,}15 - 1{,}01 - 0{,}78 \; . \; . \; . \; = -3{,}02 \text{ t}.$$

Die Auftragung der Querkräfte ergibt sich nach Abb. 176c in gleicher Weise, wie vorher.

c) Bodenplatte bei Stützung in den Eckpunkten (1. Fall).

Von der ständigen Last nach Abb. 171a

$$Q_D = -Q_C = -1{,}57 \cdot \frac{5{,}00}{2} \quad . \; . \; = -3{,}93 \text{ t},$$

von der Verkehrslast des Pfostens AD bezw. BC nach Abb. 171c u. 174a.

$$Q_D = Q_C = \pm\frac{1{,}41 - (-1{,}60)}{5{,}00} \quad . \; = \pm 0{,}60 \text{ t},$$

von der eigenen Verkehrslast nach Abb. 171d

$$Q_D = -Q_C = -0{,}50 \cdot \frac{5{,}00}{2} \quad . \; . \; = -1{,}25 \text{ t}.$$

Zusammen daher: $\max Q_D = \max Q_C = -5{,}78$ t.

Im 2. Falle wird:

Von der ständigen Last nach Abb. 172a

$$Q_D = -Q_C = 3{,}06 \cdot \frac{5{,}00}{2} \quad . \; . \; . \; = +7{,}65 \text{ t},$$

von der Verkehrslast des Balkens nach Abb. 172b

$$Q_D = -Q_C = 2{,}54 \cdot \frac{5{,}00}{2} \quad . \; . \; . \; = +6{,}35 \text{ t},$$

von der eines Pfostens AD bezw. BC nach Abb. 174c u. d

$$\pm Q_D = \mp Q_C = \frac{\mathfrak{M}_K}{l} + \frac{M_C - M_D}{l}$$

$$= -\frac{5{,}97}{5{,}00} + \frac{1{,}60 - (-1{,}79)}{5{,}00} \quad = +0{,}52 \text{ t},$$

von der eigenen Verkehrslast

$$Q_D = Q_C = 0.$$

Zusammen daher: $\max Q_D = \max Q_C = +14{,}52$ t.

Die in Abb. 176d u. e dargestellten Querkraftlinien sind mit Hilfe dieser Werte in gleicher Weise wie vorher aufgetragen. In Abb. 173f sind die Querkräfte sämtlicher Rahmenstäbe nochmals übersichtlich zusammengestellt.

Beispiel IV. Vierseitiger Rahmen mit senkrechtem Kragarm.

Die Binder der in Abb. 177 im Querschnitt dargestellten Querbahnsteighalle des neuen Hauptbahnhofes in Leipzig[1]) sind als Balken auf zwei Stützen ausgebildet und ruhen auf der Bahnseite (in der Abb. 177 rechts) mittels Kipplagern auf einer Reihe von Eisenbetonbogen, auf der anderen Seite mittels Rollenlagern auf der Umfassungswand des Empfangsgebäudes. Da der Hauptsims der Querbahnsteighalle daselbst etwa 6,5 m über der obersten Gebäudedecke liegt und durch die Reibung des Rollenlagers und durch den Winddruck wagerechte Kräfte auf die durch zahlreiche Fenster durchbrochene freistehende Gebäudewand ausgeübt werden, wurden die beiden oberen Decken des Gebäudes mit den dazwischen liegenden Teilen der Wände zu einem vierseitigen Eisenbetonrahmen verbunden, der die Kräfte möglichst gleichmäßig auf die darunterstehenden Gebäudemauern überträgt.

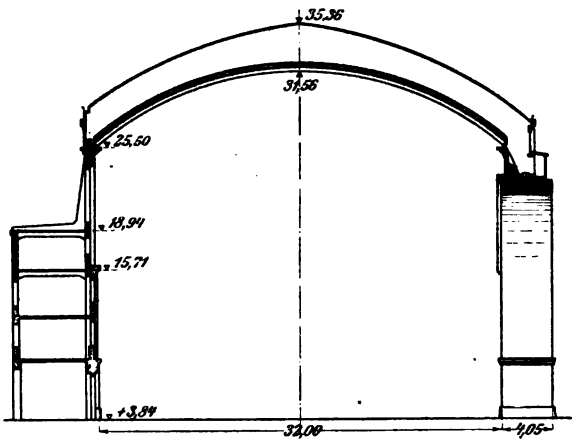


Abb. 177. Hallenbinder mit Rahmenwiderlager.

Während nun die Abstützung der freistehenden Fensterwand überall dort, wo es durchführbar war, mittels geneigter Streben nach der oberen linken Rahmenecke zu erfolgte, mußten diese an einzelnen Stellen entfallen und dafür die Pfeiler der Fensterwand als Kragarme in den Rahmen eingebunden werden (Abb. 178).

Diese Kragarme mit den anschließenden, über die Dachfläche vorstehenden wagerechten Rippen haben etwa 5 m Abstand voneinander.

Der rechte Rahmenpfosten (Abb. 178) wird durch den Fensterpfeiler gebildet, der mit nahezu gleichbleibendem Querschnitt bis zu dem Simsträger durchläuft und nur über der oberen Decke durch eine angesetzte Rippe verstärkt ist. Der linke Pfosten dagegen ist eine volle Wand und nur von wenigen Fenstern durchbrochen.

Bei diesem Beispiel soll vor allem die Wirkung eines Kragarmes erörtert, weiter aber auch ein Vergleich zwischen den Ergebnissen des hier angewendeten einfachen Verfahrens und denen der zeitraubenderen genauen Rechnung angestellt werden.

---

[1]) Vergl. Gehler, Querbahnsteighalle aus Eisenbeton für den Hauptbahnhof Leipzig (Deutsche Bauzeitung, 1912 Nr. 9 bis 11).

Eine vollständige Berücksichtigung aller für das Ergebnis bedeutsamen Einflüsse, wie z. B. die Querschnittsveränderungen innerhalb der Stablänge, die Durchbrechungen u. dergl., ist rechnerisch an sich ausgeschlossen, umsomehr als auch die wirksame Breite der plattenförmig ausgebildeten Rahmenstäbe willkürlich angenommen werden muß. Aus diesem Grunde ist aber auch jede genaue Berechnung mit den hiervon abhängigen Unsicherheiten behaftet. Es empfiehlt sich daher, bei einem Rahmen mit verschiedenartigen wechselnden Querschnitten sich mit einem einfachen angenäherten Rechnungsverfahren zu begnügen und mit Rücksicht auf die statische Unsicherheit die Stabquerschnitte reichlich zu bemessen.

Im folgenden sind die vereinfachenden Annahmen gemacht, daß beide Pfosten gleiche Trägheitsmomente haben mögen, so daß unsere Formeln S. 123 ohne weiteres benutzt werden können. Um ferner den Einfluß der Steifigkeit der an sich schwächeren Rahmenstäbe auf die Momentenverteilung zu veranschaulichen, wird hier anhangsweise die Berechnung auch noch unter der Annahme eines Rahmens mit Fußgelenken sowie eines dritten Gelenkes in der oberen linken Rahmenecke durchgeführt. Zum Vergleich sind endlich die Ergebnisse des genauen Rechnungsverfahrens unter Berücksichtigung der verschiedenen Trägheitsmomente angefügt worden.

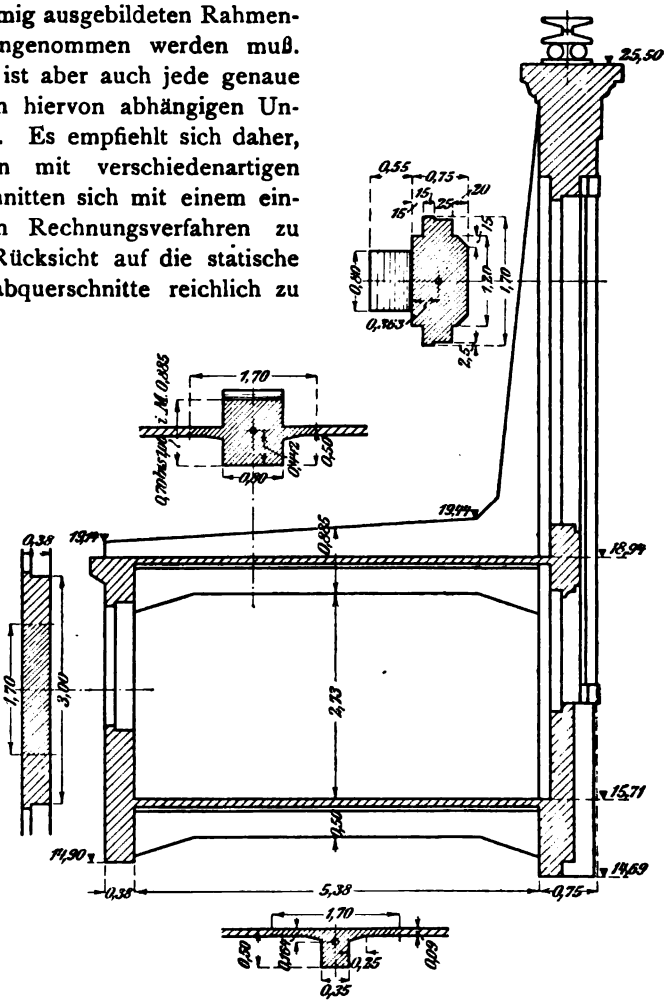


Abb. 178. Vierseitiger Rahmen mit senkrechtem Kragarm.

1. Die Rahmenabmessungen und Bemessungsgrößen.

Während für die Berechnung des wirksamen Trägheitsmomentes beim rechten Pfosten einfach der regelmäßige Pfeilerquerschnitt eingesetzt

werden kann, ist für die übrigen plattenförmigen Rahmenstäbe die wirksame Breite schätzungsweise anzunehmen. Wir wollen dieselbe der Einfachheit halber gleich der Breite des rechten Pfostens mit 1,70 m wählen, wofür sich dann die nachstehenden Querschnittswerte berechnen.

	$b \cdot h = F$		s	$F \cdot s$	J	
Rechter Pfosten	$120 \cdot 75 =$	9000	37,50	337 500	$421\,8750 + 9000 \cdot 1{,}22^2 =$	423 2000
	$45 \cdot 45 =$	1800	35,00	63 000	$24\,0000 + 1800 \cdot 1{,}32^2 =$	24 3000
	$5 \cdot 15 =$	75	22,50	1 680	$1400 + 75 \cdot 13{,}78^2 =$	1 6000
	$-\frac{2}{2} \cdot 15^2 =$	-225	70,00	$-15\,750$	$-2810 - 225 \cdot 33{,}72^2 =$	$-25\,8000$
		10 650	36,28	386 430	$J_r =$	423 3000 cm⁴
					$=$	0,0423 m⁴
Balken	$80 \cdot 88{,}5 =$	7 080	44.25	313 290	$462\,1000 + 7080 \cdot 0{,}05^2 =$	462 1000
	$90 \cdot 9 =$	810	43,00	34 830	$5500 + 810 \cdot 1{,}20^2 =$	6700
	$\frac{2}{2} \cdot 25 \cdot 5 =$	125	49,17	6 150	$170 + 125 \cdot 4{,}97^2 =$	3200
		8 015	44,20	354 270	$J_o =$	463 0900 cm⁴
					$=$	0,0463 m⁴
Bodenplatte	$35 \cdot 50 =$	1 750	25,00	43 750	$36\,4600 + 1750 \cdot 8{,}64^2 =$	49 5200
	$135 \cdot 9 =$	1 215	4,50	5 470	$8200 + 1215 \cdot 11{,}86^2 =$	17 9100
	$\frac{2}{2} \cdot 25 \cdot 5 =$	125	10,67	1 330	$170 + 125 \cdot 5{,}69^2 =$	4200
		3 090	16,36	50 550	$J_u =$	67 8500 cm⁴
					$=$	0,0068 m⁴
Linker Pfosten	$170 \cdot 38 =$	6 460	19,00	—	$J_l =$	77 7400 cm⁴
					$=$	0,0078 m⁴

Die sich ergebenden Trägheitsmomente der Rahmenstäbe und das der Lage der Schwerlinie entsprechende Rahmennetz ist in Abb. 179 eingetragen. Als Belastung ist hier nur eine wagerechte Einzellast $H = 1^t$ angenommen, die im Rollenlager auf das Ende des senkrechten Kragarmes ausgeübt wird.

2. Die Berechnung der Eckmomente.

a) Vierseitiger Rahmen mit gleich starken Pfosten.

α) Zunächst möge für beide Pfosten das größere Trägheitsmoment, nämlich das des rechten Pfostens, angenommen werden. Damit ergeben sich für die Trägheitsmomente $J_l = J_r = 0{,}0423$ m⁴ $= J_s$, ferner $J_o = 0{,}0463$ m⁴ und $J_u = 0{,}0068$ m⁴ die Festwerte

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_o}{J_s} = \frac{3.34}{5{,}93} \cdot \frac{0{,}0463}{0{,}0423} = 0{,}618$$

$$\omega = \frac{J_o}{J_u} = \frac{0{,}0463}{0{,}0068} = 6{,}80$$

$$\alpha = \nu(2 + \nu) + \omega(3 + 2\nu) = 0{,}62 \cdot 2{,}62 + 6{,}80 \cdot 4{,}24 = 30{,}45$$

$$\beta = 6\nu + 1 + \omega = 3{,}72 + 1 + 6{,}80 = 11{,}52.$$

Bringt man nach Abb. 180 im Punkte B zwei mit H gleich große, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte an, so läßt sich die Wirkung der Kraft $H = 1$ t am Ende des Kragarmes zerlegen in ein an der Ecke B wirkendes Biegungsmoment

$$\mathfrak{M} = -H \cdot k = -1 \cdot 6{,}66 = -6{,}66 \text{ tm}$$

und eine in diesem Punkt B angreifende wagerechte Kraft

$$H = 1 \text{ t}.$$

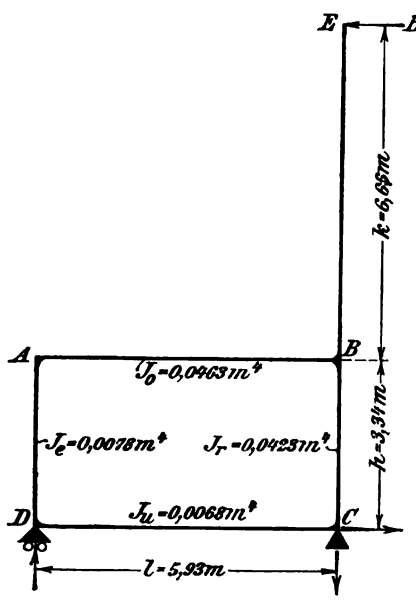


Abb. 179.

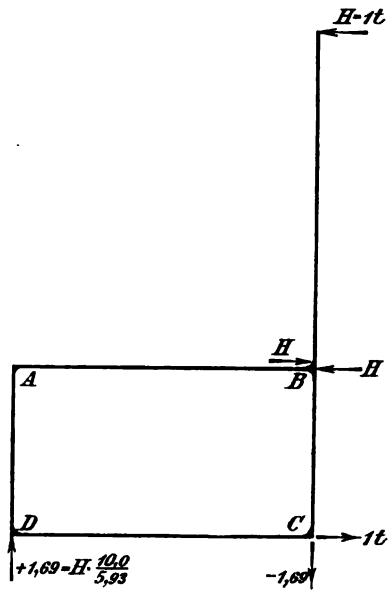


Abb. 180.

Damit ergeben sich die Eckmomente wie folgt:

Von dem Biegungsmoment $\mathfrak{M} = +6{,}66$ m ist mit den Einspannungsgraden μ nach Gl. 33b (S. 123)

$$\mu_A' = -\frac{2\nu + 3\omega}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} = -\frac{1{,}24 + 20{,}40}{60{,}90} + \frac{1}{23{,}04} = -0{,}312$$

$$\mu_B' = -\frac{2\nu + 3\omega}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta} = -\frac{1{,}24 + 20{,}40}{60{,}90} - \frac{1}{23{,}04} = -0{,}399$$

$$\mu_C' = +\frac{\nu}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta} = +\frac{0{,}62}{60{,}90} - \frac{1}{23{,}04} = -0{,}033$$

$$\mu_D' = +\frac{\nu}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} = +\frac{0{,}62}{60{,}90} + \frac{1}{23{,}04} = +0{,}054,$$

also

$$M_A' = -2{,}08 \text{ tm} \qquad M_B' = -2{,}66 \text{ tm}$$

$$M_C' = -0{,}22 \text{ tm} \qquad M_D' = +0{,}36 \text{ tm},$$

Von der Einzellast $H = -1$ t im Punkte B mit $\mathfrak{M}_k = +1 \cdot 3{,}34 = +3{,}34$ tm und den Eckmomenten μ nach Gl. 34a (S. 123) wird:

$$\mu_A'' = -\frac{3\nu+\omega}{2\beta} = -\frac{1{,}86+6{,}80}{23{,}04} = -0{,}376$$

$$\mu_B'' = -\mu_A'' = +0{,}376$$

$$\mu_C'' = -\frac{3\nu+1}{2\beta} = -\frac{1{,}86+1}{23{,}04} = -0{,}124$$

$$\mu_D'' = -\mu_C'' = +0{,}124,$$

also

$$M_A'' = -1{,}26 \text{ tm} \qquad M_B'' = +1{,}26 \text{ tm}$$
$$M_C'' = -0{,}41 \text{ tm} \qquad M_D'' = +0{,}41 \text{ tm}.$$

Zusammen wird demnach

$$M_A = M_A' + M_A'' = -3{,}34 \text{ tm} \qquad M_B = -1{,}40 \text{ tm}$$
$$M_C = -0{,}63 \text{ tm} \qquad M_D = +0{,}77 \text{ tm}.$$

β) Setzt man für beide Pfosten das kleinere Trägheitsmoment, also das des linken Pfostens ein, so ergeben sich mit

$$J_l = J_r = 0{,}0078 \text{ m}^4 = J_s,$$

ferner wie vorher

$$J_o = 0{,}0463 \text{ m}^4, \quad J_u = 0{,}0068 \text{ m}^4$$

die Festwerte

$$\nu = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_o}{J_s} = \frac{3{,}34}{5{,}93} \cdot \frac{0{,}0463}{0{,}0078} = 3{,}34$$

$$\omega = \frac{J_o}{J_u} = \frac{0{,}0463}{0{,}0068} = 6{,}80$$

$$\alpha = \nu \cdot (2+\nu) + \omega(3+2\nu) = 3{,}34 \cdot 5{,}34 + 6{,}80 \cdot 9{,}68 = 83{,}66$$
$$\beta = 6\nu + 1 + \omega = 20{,}04 + 1 + 6{,}80 = 27{,}84.$$

Mit diesen Werten erhält man in gleicher Weise wie vorher von dem Biegungsmoment $\mathfrak{M} = +6{,}66$ tm:

$$\mu_A' = -\frac{6{,}68+20{,}40}{167{,}32} + \frac{1}{55{,}68} = -0{,}162 + 0{,}018 = -0{,}144$$

$$\mu_B' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -0{,}162 - 0{,}018 = -0{,}180$$

$$\mu_C' = +\frac{3{,}34}{167{,}32} - \frac{1}{55{,}68} \ldots\ldots = +0{,}020 - 0{,}018 = +0{,}002$$

$$\mu_D' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = +0{,}020 + 0{,}018 = +0{,}038,$$

also

$$M_A' = -0{,}96 \text{ tm} \qquad M_B' = -1{,}20 \text{ tm}$$
$$M_C' = +0{,}01 \text{ tm} \qquad M_D' = +0{,}25 \text{ tm}.$$

Von der Einzellast $H = -1$ t mit $\mathfrak{M}_k = +3{,}34$ tm wird

$$\mu_A'' = -\frac{10{,}02+6{,}80}{55{,}68} = -0{,}302 \qquad \mu_B'' = +0{,}302$$

$$\mu_C'' = -\frac{10{,}02+1}{55{,}68} = -0{,}198 \qquad \mu_D'' = +0{,}198,$$

also

$$M_A'' = -1{,}01 \text{ tm} \qquad M_B'' = +1{,}01 \text{ tm}$$
$$M_C'' = -0{,}66 \text{ tm} \qquad M_D'' = +0{,}66 \text{ tm},$$

zusammen also

$$M_A = -1{,}97 \text{ tm} \qquad M_B = -0{,}19 \text{ tm}$$
$$M_C = -0{,}65 \text{ tm} \qquad M_D = +0{,}91 \text{ tm}.$$

b) Dreiseitiger Gelenkrahmen mit verschieden steifen Pfosten.

Vernachlässigt man die nur geringe Steifigkeit des unteren Rahmenstabes, setzt also $J_u = 0$, so entsteht ein Gelenkrahmen mit ungleichen Pfosten (nach S. 129). Für diesen erhält man mit

$$J_o = 0{,}0463 \text{ m}^4 \qquad J_l = 0{,}0078 \text{ m}^4 \qquad J_r = 0{,}0423 \text{ m}^4$$

die Werte

$$\nu_l = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_o}{J_l} = \frac{3{,}34}{5{,}93} \cdot \frac{0{,}0463}{0{,}0078} = 3{,}34$$

$$\nu_r = \frac{h}{l} \cdot \frac{J_o}{J_r} = \frac{3{,}34}{5{,}93} \cdot \frac{0{,}0463}{0{,}0423} = 0{,}62$$

$$\alpha = \nu_l + \nu_r + 3 = 6{,}96.$$

Demnach von dem Biegungsmoment $\mathfrak{M} = +6{,}66$ tm

$$\mu_A' = \mu_B' = -\frac{3}{2\alpha} = -\frac{3}{13{,}92} = -0{,}215$$

$$M_A' = M_B' = -1{,}43 \text{ tm},$$

von der Einzellast $H = -1$ t mit $\mathfrak{M}_k = +3{,}34$ tm

$$\mu_A'' = -\frac{1}{2\alpha}(2\nu_r + 3) = -\frac{4{,}24}{13{,}92} = -0{,}305$$

$$\mu_B'' = +\frac{1}{2\alpha}(2\nu_l + 3) = +\frac{3{,}68}{13{,}92} = +0{,}695$$

$$M_A'' = -1{,}02 \text{ tm} \qquad M_B'' = +2{,}32 \text{ tm},$$

zusammen daher

$$M_A = -2{,}45 \text{ tm} \qquad M_B = +0{,}89 \text{ tm}.$$

c) Dreigelenkrahmen.

Vernachlässigt man endlich auch noch die Steifigkeit des linken Rahmenstabes, setzt also auch $J_l = 0$, so entspricht diese Vereinfachung der Annahme dreier Gelenke in den Punkten A, C und D, so daß der Rahmen statisch bestimmt wird. Man erhält dann

mit $A = -B = \frac{10{,}0}{5{,}93} = 1{,}69$ t das Biegungsmoment im Balken AB bei B

$$M_B = 1{,}69 \cdot 5{,}93 = +10{,}0 \text{ tm},$$

ferner mit $H = 1$ t das Biegungsmoment im Pfosten BC bei B

$$M_B = 1{,}0 \cdot 3{,}34 = +3{,}34 \text{ tm}.$$

d) Berechnung als vierseitiger Rahmen unter Berücksichtigung des Trägheitsmomentes eines jeden Stabes.

Vernachlässigt man in ganz gleicher Weise wie bisher bei allen unseren Berechnungen (vergl. S. 29) die Längenänderungen der Rahmenstäbe, so kann man die Eckmomente folgendermaßen ermitteln.

Man zerschneidet zunächst den Rahmen an der Ecke A (Abb. 181) und bringt an jedem der beiden so erhaltenen Stabenden die Kräfte X und Y sowie das Moment Z an. Auf diese Weise erhält man ein statisch bestimmtes Hauptnetz, auf welches außer den durch den Belastungsfall gegebenen Kräften noch die statisch unbestimmbaren Größen X, Y und Z als äußere Kräfte einwirken. Sodann bestimmt man die Verschiebungen Δ_x und Δ_y, ferner die Verdrehung Δ_z dieser beiden Stabenden gegeneinander unter der Wirkung der gegebenen Belastung sowie unter der von X, Y und Z. Da in Wirklichkeit die beiden Stabenden in demselben Punkte zusammenstoßen und daselbst auch fest miteinander verbunden sind, so müssen ihre gegenseitigen Verschiebungen Δ_x und Δ_y und ihre gegenseitige Verdrehung Δ_z Null sein, woraus sich drei Gleichungen für die drei statisch unbestimmbaren Größen X, Y und Z ergeben.

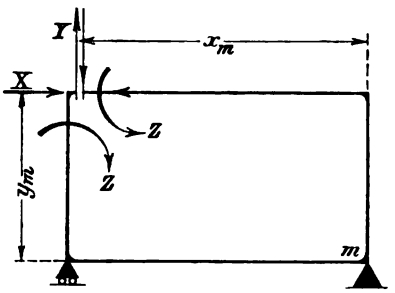


Abb. 181.

Das Moment für die Ecke m erhält man endlich nach der Gleichung

$$M_m = \mathfrak{M} - X M_x - Y M_y - Z M_z \quad \ldots \quad \text{I.}$$

wobei $\mathfrak{M}$ das Biegungsmoment für einen Eckpunkt m des statisch bestimmten Hauptnetzes bedeutet und M_x, M_y, M_z jeweils die Eckmomente für die Belastung desselben mit $X = -1$, $Y = -1$ und $Z = -1$.

Um die Größe von Δ_x, Δ_y und Δ_z zu bestimmen, sind zunächst die Verdrehungen der einzelnen Stabenden zu ermitteln. In Abb. 182 sind mit α_1 bis α_8 nach S. 85 die Stabdrehwinkel der vier Rahmenecken bezeichnet, wobei die darin eingetragenen Drehwinkel den positiven Biegungsmomenten entsprechen und daher auch als positiv bezeichnet werden. Da diese Stabdrehwinkel in Wirklichkeit sehr klein sind, kann anstatt des Sinus mit genügender Genauigkeit das Bogenmaß gesetzt werden.

Nach Abb. 182 ergibt sich:

die wagerechte gegenseitige Verschiebung der beiden Stabenden zu

$$\Delta_x = \Delta_x' + \Delta_x'' = h(\alpha_7 + \alpha_6) + h(\alpha_5 + \alpha_4) = h(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7)$$

die lotrechte gegenseitige Verschiebung zu

$$\Delta_y = l(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2)$$

endlich die gegenseitige Verdrehung zu

$$\Delta_z = \varphi' + \varphi'' = (\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) + (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_8$$

} II.

Die Beziehung zwischen den Stabdrehwinkeln eines beliebig belasteten Rahmenstabes AB und den an seinen Enden wirkenden Eckmomenten M_a und M_b ist aus der Uebersicht S. 88 (vergl. auch S. 129) zu

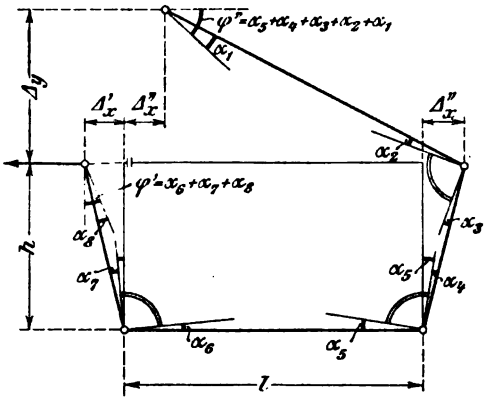


Abb. 182.

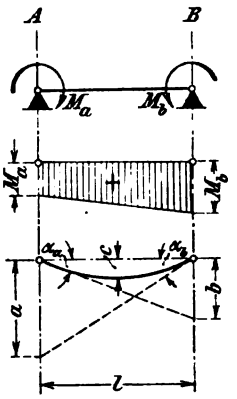


Abb. 183.

entnehmen. Für unseren Fall, in welchem die Momentenflächen für alle Stäbe eine einfache trapezförmige Gestalt haben, ist nach Abb. 183:

$$\alpha_a = \operatorname{tg} \alpha_a = \frac{b}{l} = \frac{K}{l}\left(\frac{M_a}{3} + \frac{M_b}{6}\right) = \frac{2M_a + M_b}{6} \cdot \frac{l}{EJ}$$
$$= (2M_A + M_B) \cdot \varkappa,$$

wenn $\varkappa = \frac{l}{6EJ} = \frac{K}{6l}$ ist. In gleicher Weise ergibt sich

$$\alpha_b = \ldots\ldots\ldots = \frac{M_a + 2M_b}{6} \cdot \frac{l}{EJ} = (M_a + 2M_b) \cdot \varkappa.$$

Setzt man hier zur Vereinfachung der Rechnung $6E = 100$, so erhält man hier $\varkappa = \frac{1}{100J}$ und damit die Stabdrehwinkel

für den Balken mit

$$\varkappa_o = \frac{l}{6EJ_o} = \frac{l}{100J_o} = \frac{5{,}93}{4{,}632} = 1{,}2802$$

$$\alpha_1 = (2M_a + M_b')\,\varkappa_o$$
$$\alpha_2 = (M_a + 2M_b')\,\varkappa_o$$

für den rechten Pfosten mit

$$\varkappa_r = \frac{h}{100J_r} = \frac{3{,}34}{4{,}234} = 0{,}7889$$

$$\alpha_3 = (2M_b'' + M_c)\,\varkappa_r$$
$$\alpha_4 = (M_b'' + 2M_c)\,\varkappa_r$$

für die Bodenplatte mit

$$\varkappa_u = \frac{l}{100J_u} = \frac{5{,}93}{0{,}678} = 8{,}7463$$

$$\alpha_5 = (2M_c + M_d)\,\varkappa_u$$
$$\alpha_6 = (M_c + 2M_d)\,\varkappa_u$$

für den linken Pfosten mit

$$\varkappa_l = \frac{h}{100J_l} = \frac{3{,}34}{0{,}777} = 4{,}2986$$

$$\alpha_7 = (2M_d + M_a)\,\varkappa_l$$
$$\alpha_8 = (M_d + 2M_a)\,\varkappa_l$$

Hierbei ist mit M_b' das Eckmoment im Balken unmittelbar links von B und mit M_b'' das Eckmoment im Pfosten unmittelbar unterhalb B bezeichnet.

Durch Einsetzen dieser Werte in die Ausdrücke für Δ_x, Δ_y und Δ_z (Gl. II) ergibt sich bei trapezförmiger Verteilung der Biegungsmomente für das Hauptnetz der Abb. 181:

$$\Delta_x = h\,[M_a x_l \quad + \ldots \quad + M_b'' x_r \; + M_c\,(2x_r + 3x_u) + M_d\,(2x_l + 3x_u)]$$
$$\Delta_y = l\,[M_a x_o \quad + 2M_b' x_o + 3M_b'' x_r + M_c\,(3x_r + 2x_u) + M_d x_u]$$
$$\Delta_z = 3\,[M_a(x_l + x_o) + M_b' x_o \; + M_b'' x_r \; + M_c\,(x_r + x_u) \quad + M_d\,(x_u + x_l)]$$

oder mit den vorberechneten Werten x

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= 14{,}357\,M_a + \ldots \quad + 2{,}635\,M_b'' + 92{,}907\,M_c + 116{,}353\,M_d \\ \Delta_y &= 7{,}592\,M_a \; + 15{,}183\,M_b' + 14{,}035\,M_b'' + 117{,}765\,M_c + 51{,}866\,M_d \\ \Delta_z &= 16{,}736\,M_a + 3{,}841\,M_b' + 2{,}367\,M_b'' + 28{,}605\,M_c + 39{,}135\,M_d \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Hiermit sind die drei Gleichungen gefunden, aus denen für die vier Eckmomente M_a, M_b, M_c und M_d die zugehörigen Verschiebungen Δ_x, Δ_y und die Verdrehung Δ_z ohne weiteres berechnet werden können.

Da die Größen Δ_x, Δ_y und Δ_z anderseits aber von den drei statisch unbestimmbaren Größen X, Y und Z abhängen, müssen sie sich in der Form schreiben lassen:

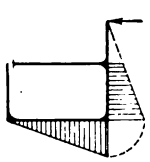
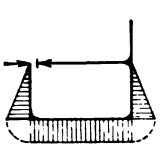
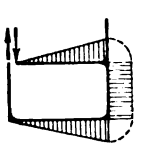
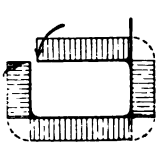
$$\Delta_x = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 X - \mathfrak{C}_1 Y - \mathfrak{D}_1 Z$$
$$\Delta_y = \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 X - \mathfrak{C}_2 Y - \mathfrak{D}_2 Z$$
$$\Delta_z = \mathfrak{A}_3 - \mathfrak{B}_3 X - \mathfrak{C}_3 Y - \mathfrak{D}_3 Z.$$

Die unbekannten Beiwerte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind dadurch zu bestimmen, daß nacheinander die Belastungsfälle

$X = Y = Z = 0$; ferner $X = -1$; $Y = -1$ und $Z = -1$

betrachtet werden, daß also das statisch bestimmte Hauptnetz der Abb. 181 der Reihe nach mit den äußeren Kräften allein und sodann mit je einer der statisch unbestimmbaren Größen belastet wird.

Diese vier Belastungszustände sind in Abb. 184a bis d dargestellt und in der darunterstehenden Spalte der Uebersicht die sich dafür ergebenden Eckmomente eingeschrieben.

Belastungsfall Abb. 184a bis d	$H = 1$	$X = -1$	$Y = -1$	$Z = -1$
				
Eckmomente $M_a =$	0	0	0	-1
$M_b' =$	0	0	$-5{,}93$	-1
$M_b'' =$	$-6{,}66$	0	$-5{,}93$	-1
$M_c =$	$-10{,}00$	$-3{,}34$	$-5{,}93$	-1
$M_d =$	0	$-3{,}34$	0	-1
Beiwerte nach Gl. III für Δ_x	$\mathfrak{A}_1 = -946{,}62$	$\mathfrak{B}_1 = -698{,}93$	$\mathfrak{C}_1 = -566{,}57$	$\mathfrak{D}_1 = -226{,}25$
Δ_y	$\mathfrak{A}_2 = -1271{,}11$	$\mathfrak{B}_2 = -566{,}57$	$\mathfrak{C}_2 = -871{,}60$	$\mathfrak{D}_2 = -206{,}44$
Δ_z	$\mathfrak{A}_3 = -301{,}82$	$\mathfrak{B}_3 = -226{,}25$	$\mathfrak{C}_3 = -206{,}44$	$\mathfrak{D}_3 = -90{,}68$

(Während an den Ecken A, C und D in jedem Belastungsfalle die daselbst zusammenstoßenden Stabenden gleiche Biegungsmomente aufweisen, tritt an der Ecke B im Belastungsfalle $H = 1$ ein Biegungsmoment nur im Pfosten des statisch bestimmten Hauptnetzes auf, im Balken dagegen nicht, weil die Kraft $H = 1^t$ an der Verlängerung des Pfostens angreift und den Balken des Hauptnetzes daher nicht beeinflußt. In diesem Falle ist daher die Verschiedenheit der oben eingeführten Werte M_b' und M_b'' zu beachten.)

Nach Gl. III ergeben sich durch Einsetzen dieser Werte für die Eckmomente die in der dritten Reihe eingetragenen Beiwerte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$.

Mit diesen Beiwerten erhält man die drei Elastizitätsgleichungen mit den drei Unbekannten

$$\Delta_x = -\ 946{,}62 - 698{,}93\,X - 566{,}57\,Y - 226{,}25\,Z = 0$$
$$\Delta_y = -\ 1271{,}12 - 566{,}57\,X - 871{,}60\,Y - 206{,}44\,Z = 0$$
$$\Delta_z = -\ 301{,}81 - 226{,}25\,X - 206{,}44\,Y - 90{,}68\,Z = 0.$$

Hieraus berechnen sich die drei statisch unbestimmbaren Größen

$$X = -0{,}929\text{ t}; \qquad Y = -1{,}335\text{ t}; \qquad Z = +2{,}028\text{ tm}.$$

Mit diesen Werten und den Werten für die Eckmomente aus der zweiten Reihe der Uebersicht ergeben sich nach Gl. I die gesuchten Eckmomente des Rahmens zu

$$M_a = -2{,}028\text{ tm}; \qquad M_b' = +5{,}889\text{ tm}; \qquad M_b'' = -0{,}771\text{ tm};$$
$$M_c = -1{,}010\text{ tm}; \qquad M_d = +1{,}074\text{ tm}.$$

8. Die Auftragung der Biegungsmomente und der Mittelkraftlinien.

In Abb. 185 sind die vorstehend unter Punkt 2d nach der genauen Berechnung ermittelten Biegungsmomente aufgetragen worden.

Die Mittelkraftlinie erhält man dadurch, daß man nach S. 75 zunächst die Nullpunkte W_1 und W_2 der Momentenfläche geradlinig verbindet und bis zum Schnittpunkt E mit der Kraft H verlängert. Sodann ist E mit dem außerhalb des Stabes BC liegenden Nullpunkt W_3 der Momentenlinie des rechten Pfostens und endlich W_3 mit W_4 zu verbinden. Den Kräfteplan erhält man in ganz ähnlicher Weise wie in Abb. 91b, wobei wieder äußerlich statisch bestimmte Stützung des Rahmens angenommen ist. Man trägt zuerst $H = 1$ t als Strecke ac auf und zieht durch den Punkt a eine Parallele zu $W_1 W_2$, durch den Punkt c eine Parallele zu $E W_3$, wobei sich der Schnittpunkt b ergibt. Auf der Senkrechten in b ist wiederum be die statisch unbestimmte Größe Y. Die statisch unbestimmte Größe X ist dann durch die Strecke ea bestimmt. Zieht man durch den Punkt a eine Parallele zu $W_1 W_4$, so ergibt sich auf der Senkrechten be der Schnittpunkt d, durch welchen der Stützendruck $bd = A = -B$ bestimmt ist. Zur Probe muß sich dc parallel zu $W_3 W_4$ ergeben (vergl. die Erläuterung S. 76).

Die Mittelkraftflächen der einzelnen Stäbe sind in Abb. 185c bis f herausgezeichnet. Bemerkt sei noch, daß beim vierseitigen Rahmen sich für jeden Stab zwei Mittelkraftlinien ergeben; so z. B. erhält man für den Stab AD die durch den Wendepunkt W_1 des Stabes gelegten Linien

$W_1\,W_2$ und $W_1\,W_4$. Unter Berücksichtigung der zugehörigen Längskraft $be = Y$ bezw. der Längskraft $ed = A - Y$ erhält man für jeden Schnitt aus beiden Flächen den gleichen Wert für das Biegungsmoment.

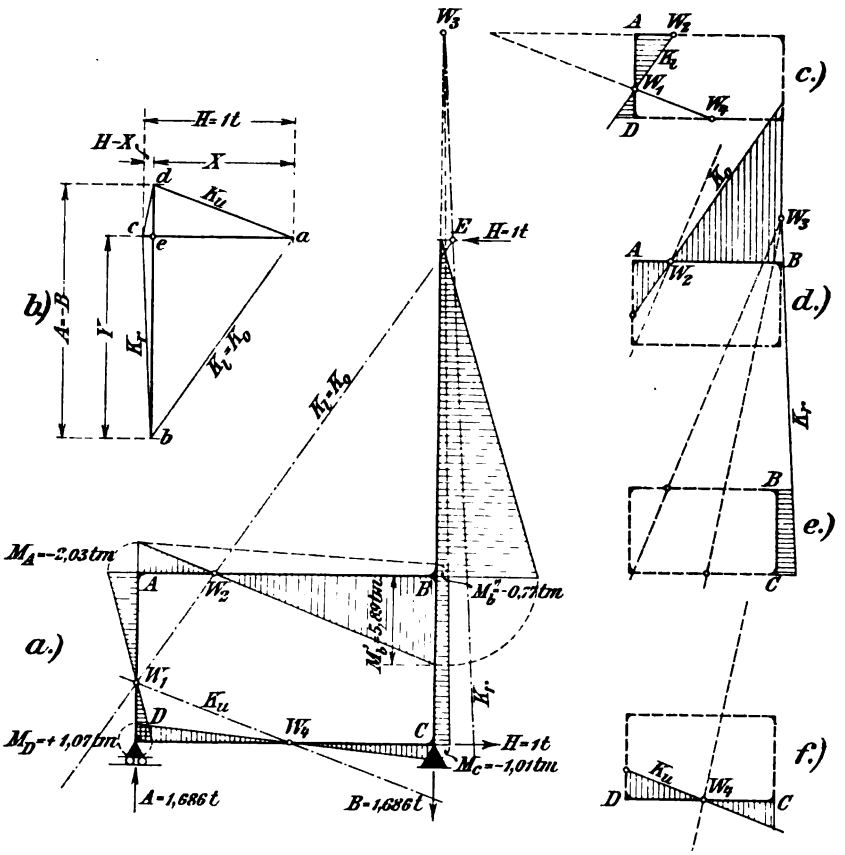


Abb. 185. Biegungsmomente und Mittelkraftlinie bei der genauen Berechnung.

In Abb. 186 a bis d sind in derselben Weise wie in Abb. 9 die Biegungsmomente und die Mittelkraftlinien mit den zugehörigen Kräfteplänen für die Ergebnisse der anderen Rechnungsannahmen aufgetragen. Abb. 186a und b entsprechen dem vierseitigen Rahmen mit gleich starken Pfosten (vergl. Punkt 2a, α und β), und zwar unter Annahme des größeren oder des kleineren Trägheitsmomentes. Wie ein Vergleich dieser Abbildungen mit Abb. 185a zeigt, liegt das Ergebnis der genauen Berechnung zwischen diesen beiden Grenzfällen, was sich besonders in der Lage des Punktes E ausdrückt. Demgegenüber zeigt Abb. 186c das Ergebnis für die Annahme eines dreiseitigen Gelenkrahmens (vergl. Punkt 2b), bei dem also $J_u = 0$ gesetzt ist, ferner Abb. 186d das entsprechende Bild für den statisch bestimmten Rahmen mit drei Gelenkpunkten bei A, C und D (vergl. Punkt 2c).

Bemerkenswert ist besonders die Lage des Punktes E, der sich mit abnehmender Steifigkeit der Pfosten insbesondere des linken Pfostens

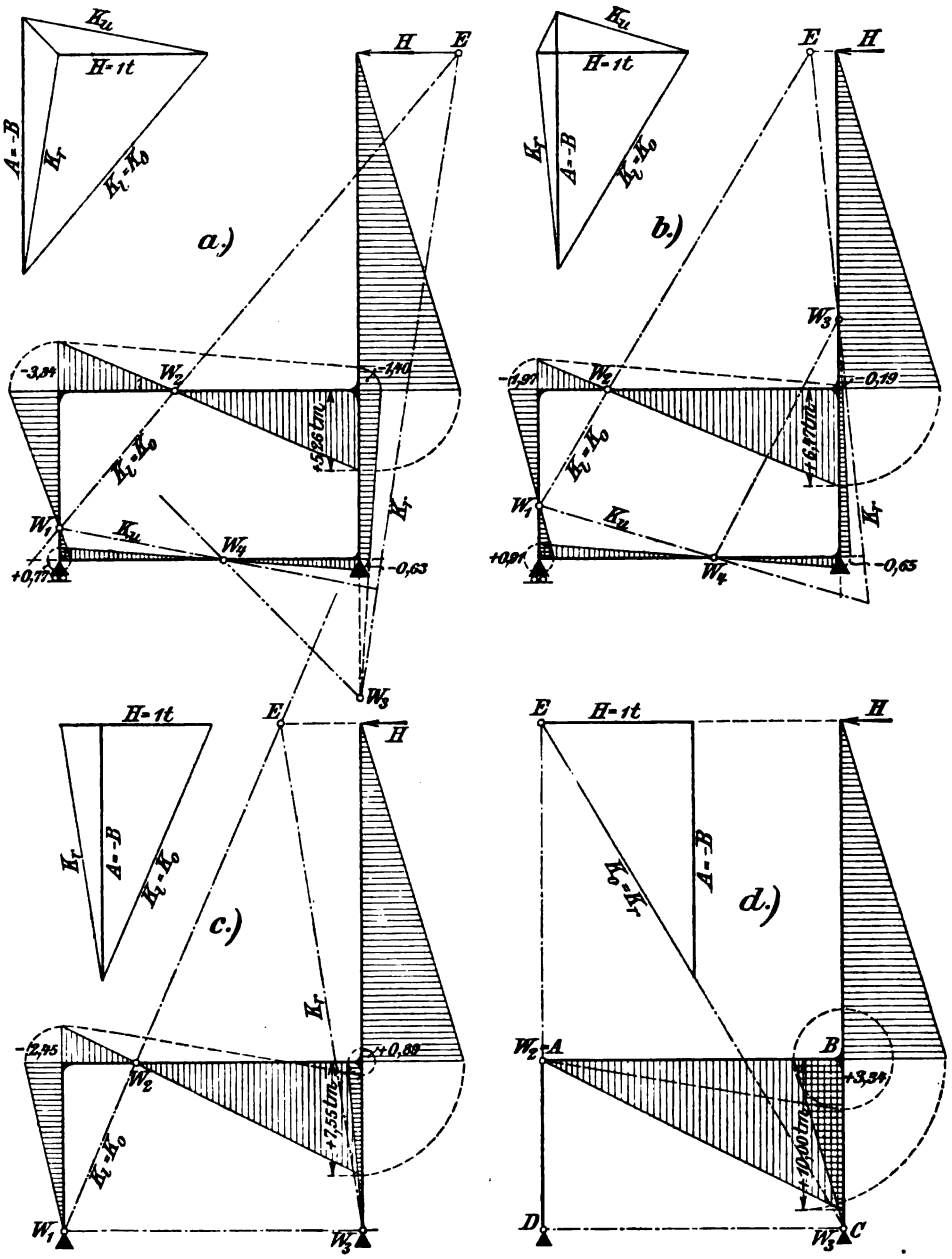


Abb. 186. Biegungsmomente und Mittelkraftlinie

a) beim vierseitigen Rahmen mit gleichstarken Pfosten unter Annahme des größeren Trägheitsmomentes
b) „ „ „ „ „ „ „ „ „ kleineren „
c) „ dreiseitigen „ „ verschieden steifen Pfosten.
d) „ Dreigelenkrahmen.

immer weiter nach links verschiebt, bis er im Falle $J_l = 0$ der Abb. 186d in die Verlängerung der Pendelstütze AD fällt. Angenähert im gleichen Maße wächst das Eckmoment M_b' des Balkens im Punkt B von $+ 5{,}26$ tm bis auf $+ 10{,}00$ tm. Die nach dem einfachen Verfahren mittels des Einspannungsgrades berechnete Momentenverteilung der Abb. 186a und b darf somit als eine befriedigende Annäherung an das Ergebnis (Abb. 185) der genaueren, aber sehr zeitraubenden und umständlichen Berechnung im Punkt 2d angesehen werden, umsomehr, als selbst bei dieser die Veränderlichkeit der Trägheitsmomente innerhalb der Stablänge noch nicht berücksichtigt ist und die Wahl der Trägheitsmomente der vier Rahmenstäbe infolge der Unklarheit über die wirksame Breite der plattenförmigen Stäbe ebenfalls eine Willkür in sich schließt.

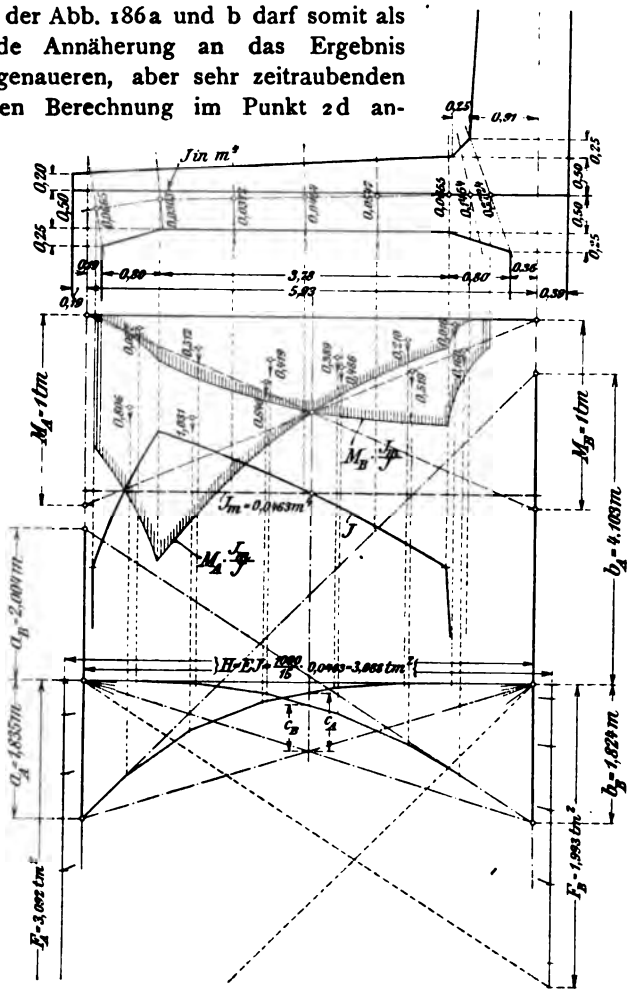


Abb. 187. Zeichnerische Ermittlung der Stabdrehwinkel unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Querschnitts.

Zur Beurteilung des Genauigkeitsgrades ist in Abb. 187 endlich noch die Ermittlung der Stabdrehwinkel für den Balken AB auf zeichnerischem Wege unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Querschnitte innerhalb der Stablänge durchgeführt worden. An Stelle der früheren Stabdrehwinkel

$$\alpha_1 = 1{,}2802\,(2M_a + M_b') \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 1{,}2802\,(2M_a + M_b')$$

(vergl. S. 180) erhält man hiernach die Werte

$$\alpha_1 = 2{,}8452\,M_a + 1{,}2182\,M_b' \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 1{,}3076\,M_a + 1{,}3558\,M_b'.$$

Führt man die Berechnung unter Punkt 2 d mit diesen genaueren Werten der Stabdrehwinkel nochmals durch, so erhält man die Momentenverteilung nach Abb. 188 mit den daselbst eingetragenen Mittelkraftlinien und dem zugehörigen Kräfteplan. Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit den Abb. 185, 186a und 186b lehrt, daß bereits die Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes im Balken AB ebenso große Abweichungen von dem Ergebnis der Abb. 185 zeigt wie die Annäherungsrechnungen (Abb. 186a und 186b), die somit selbst für diesen verwickelteren Fall als hinreichend genau empfohlen werden kann.

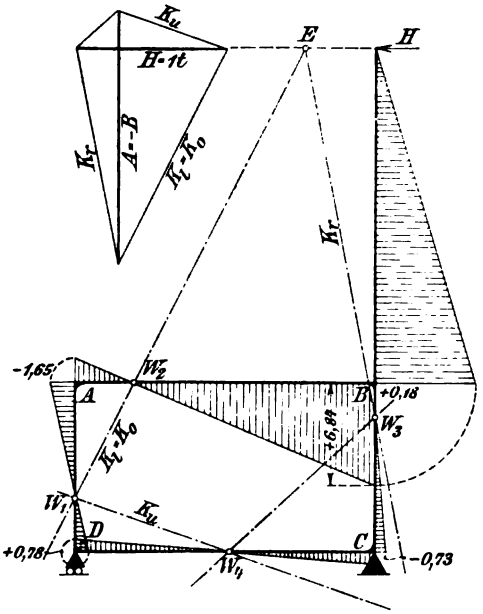


Abb. 188. Biegungsmomente und Mittelkraftlinien unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Querschnitte des Balkens AB.

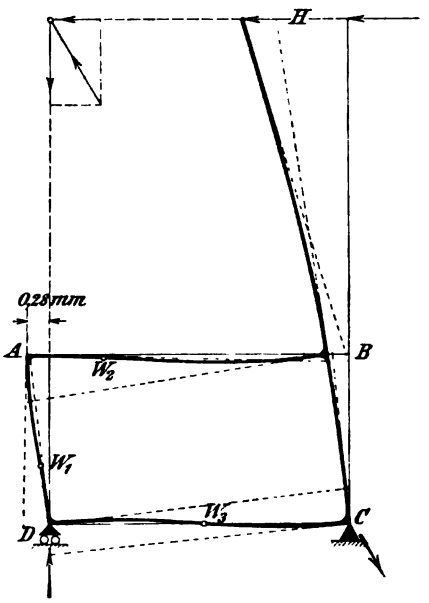


Abb. 189. Biegelinie bei der genauen Berechnung.

4. Aufzeichnung der Biegelinien.

Abgesehen von dem Vorzug der Anschaulichkeit empfiehlt sich die Aufzeichnung der Biegelinie eines Rahmens zur Nachprüfung der übrigen Rechnungsergebnisse, da sich jeder Fehler in der Rechnung dadurch bemerkbar macht, daß die aneinandergesetzten Biegelinien der Rahmenstäbe keinen geschlossenen Linienzug ergeben.

Um die Biegelinie zu zeichnen, sind die Stabdrehwinkel für alle Stäbe nach der Anleitung von S. 129 unter Benutzung ihrer Tangentenabschnitte auf den Endloten zu berechnen. Für die Eckmomente der genauen Berechnung (vergl. Punkt 2 a) erhält man die in der nachstehenden Uebersicht zusammengestellten Werte:

Stab	J	$1000K$	M_a	M_b	$\frac{M_a + 2M_b}{6}$	$\frac{2M_a + M_b}{6}$	$\frac{M_a + M_b}{16}$	a	b	c
AB	0,0463	0,362	− 2,028	+ 5,889	+ 1,625	+ 0,306	+ 0,241	+ 0,588	+ 0,111	+ 0,087
BC	0,0423	0,1255	− 0,771	− 1,010	− 0,465	− 0,425	− 0,111	− 0,058	− 0,053	− 0,014
CD	0,0068	2,47	− 1,010	+ 1,074	+ 0,190	− 0,158	+ 0,004	+ 0,470	− 0,390	+ 0,010
DA	0,0078	0,683	+ 1,074	− 2,028	− 0,497	+ 0,020	− 0,060	− 0,339	+ 0,014	− 0,041

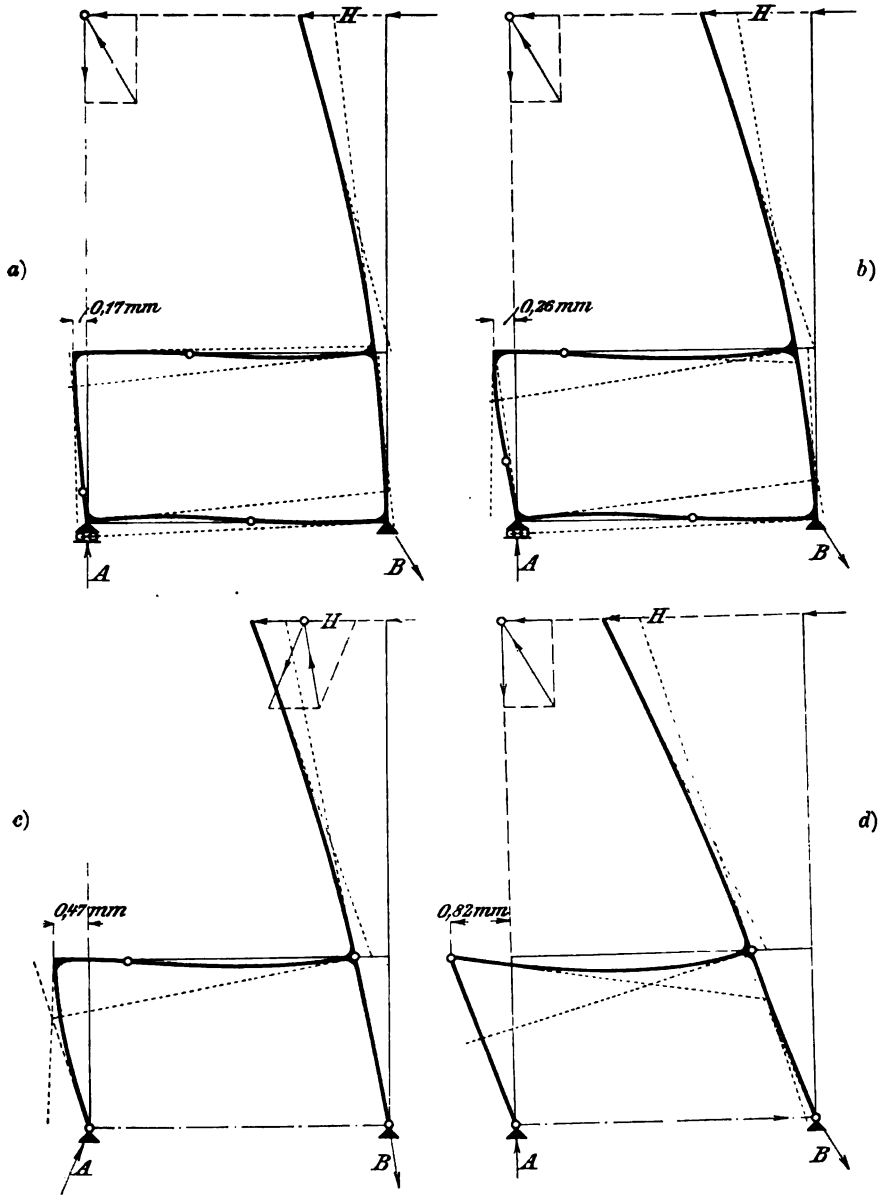


Abb. 190. Biegelinien

a) beim vierseitigen Rahmen mit gleichstarken Pfosten unter Annahme des größeren Trägheitsmomentes
b) „ „ „ „ „ „ „ „ kleineren „
c) „ dreiseitigen „ „ „ verschieden steifen Pfosten
d) „ Dreigelenkrahmen.

Um bequeme Zahlenwerte zu erhalten, sind in der dritten Spalte die Werte 1000 K angegeben und für die Berechnung der Werte a, b und c anstatt des Wertes K (vergl. S. 88) benutzt worden. Da alle sonstigen in der Rechnung vorkommenden Größen auf Meter bezogen sind, ergeben sich damit die Tangentenabschnitte a und b sowie die Pfeilhöhe c in $\frac{1}{1000}$ m, also in mm. Die Verschiebungen sind in 10facher Vergrößerung in das im Maßstabe 1 : 150 gezeichnete Rahmennetz eingetragen, so daß eine 1500fache Verzerrung der Biegelinie entsteht.

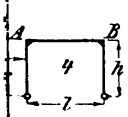
Bei der Aufzeichnung der Biegelinie selbst empfiehlt es sich, vom Stab DC, dessen beide Endpunkte durch die Stützen in ihrer Lage festgehalten werden, auszugehen. Dann trägt man an den Stabdrehwinkel in C den rechten Winkel der Rahmenecke selbst an, sodann weiter den Stabdrehwinkel des Pfostens und schreitet so über die Ecken B und A bis zum Punkt D fort, wo sich zur Probe sowohl in bezug auf die Verschiebung, als auch auf die Verdrehung der Linienzug schließen muß. Durch Eintragung der die Tangentenlinien an den Ecken berührenden stetig gekrümmten Linien, die in der Stabmitte den Abstand c von der Stabsehne haben müssen, ergibt sich sodann die Biegelinie Abb. 189.

In dieser Weise sind auch für die übrigen betrachteten Rechnungsannahmen in Abb. 190a bis d die Biegelinien gezeichnet worden, die denen der Momentenbilder der Abb. 186a bis d entsprechen. Auch hier zeigt sich, z. B. in der im Punkt A angeschriebenen wagerechten Verschiebung des Rahmens nach Abb. 189 und Abb. 190a u. b, eine ähnliche befriedigende Übereinstimmung wie bei den Momentenbildern. Endlich sei noch auf den in Abb. 189 uud 190 an den Stützen eingetragenen Sinn und die Richtung der Stützkräfte hingewiesen.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Einspannungsgrade μ

$- W \cdot r$

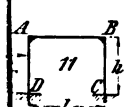


$+ \nu (1 + \eta^2)$

$2 \alpha_1$

$+ \nu (3 - \eta^2)$

$2 \alpha_1$



$+ \eta)$

$- \eta)$

$4 \nu + 9 \nu^2 \quad - \eta (1 + \nu)]$

β_2

$+ 26 \nu + 15 \nu^2 \quad - \eta (1 + \nu)]$

β_2

$\mathfrak{M} = - W \cdot \frac{h}{2} = - w \cdot \frac{h}{2}$

$+ 23) \nu^2 + (11 \nu + 45) \nu \cdot \omega +$

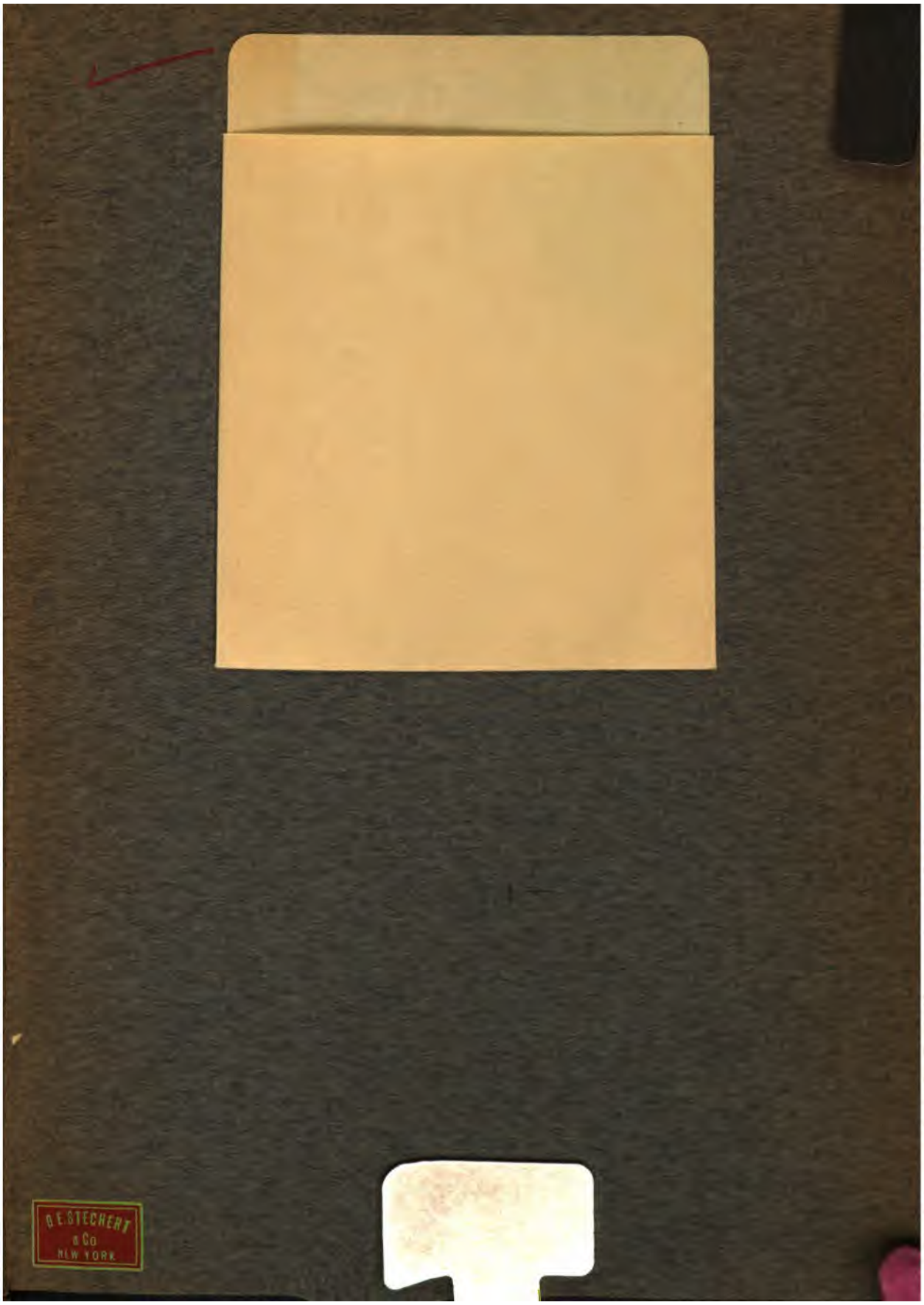
$\nu + 25) \nu^2 + (49 \nu + 51) \nu \cdot \omega +$

$\nu^2 + 35 \nu + 9) \nu + (47 \nu^2 + 81$

$\nu^2 + 73 \nu + 15) \nu + (49 \nu^2 + 8$

89078549359

B89078549359A


G.E.STECHERT
& Co
NEW YORK